Aufgabe 2

$$\alpha(t) = (3\cosh t,\ 2\sinh t)$$

a) Kartesische Form: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$\boxed{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1, \quad x \geq 0}$$

(Hyperbel)

Asymptoten: $\boxed{y = \pm \frac{2}{3} x}$

b) Geschwindigkeit: $\dot\alpha(t) = (3\sinh t,\ 2\cosh t)$

$$|\dot\alpha(t)|^2 = 9\sinh^2 t + 4\cosh^2 t$$
$$= 4 + 13 \underbrace{\sinh^2 t}_{\geq 0}$$

$= 0 \iff t = 0$

$\Rightarrow$ ~~minimale~~ Geschwindigkeit $|\dot\alpha(0)| = 2$ wird in $(3,0)$ angenommen

c) Krümmung: $$K(t) = \frac{x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{6(\sinh^2 t - \cosh^2 t)}{(9\sinh^2 t + 4\cosh^2 t)^{3/2}}$$

$$= 6 / (4 + 13\sinh^2 t)^{3/2}$$

Diese ist maximal für $t = 0$ (cf. b))

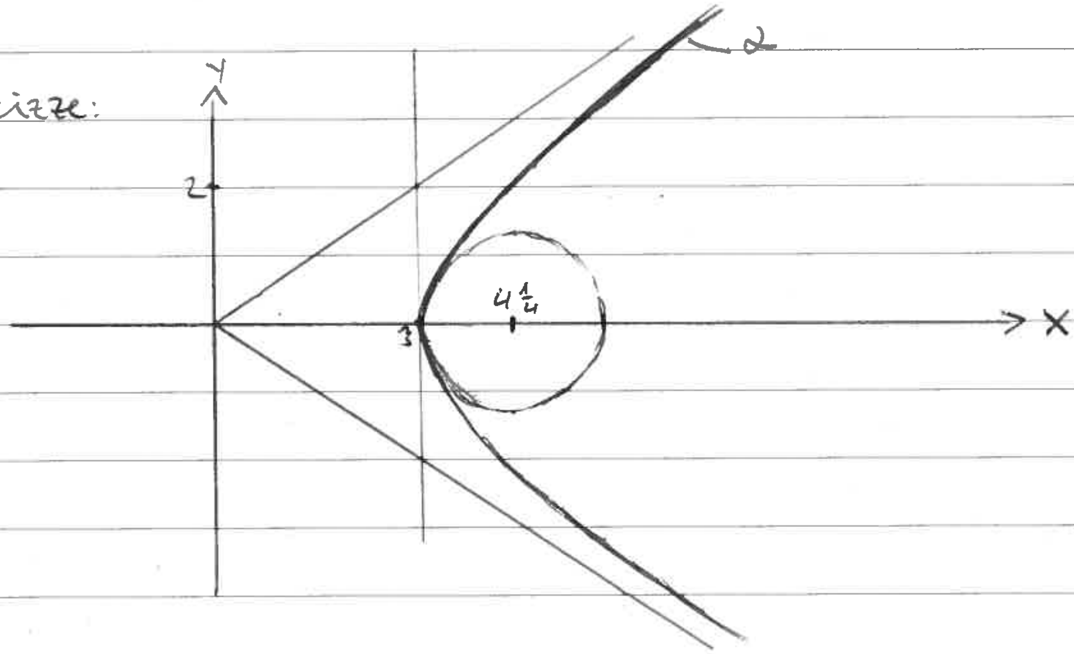
$$\boxed{K(0) = \frac{3}{4}}$$

maximale Krümmung wird in $(3,0)$ angenommen

Radius des Krümmungskreises: $r = \frac{1}{\kappa}$

also in O: $r = \frac{4}{3}$

Skizze:



d) Asymptotisches Verhalten der Krümmung:

$$\kappa(t) = \frac{6}{(4+13\underbrace{\sinh^2 t}_{\to\infty})^{3/2}} \xrightarrow{t\to\pm\infty} 0$$

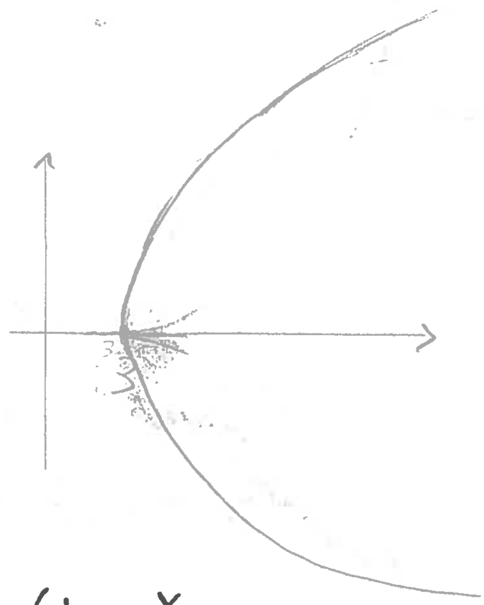
(Bezug zu Resultat in a): Hyperbel wird mit $|t| \to \infty$ immer flacher.
Deswegen existieren Asymptoten überhaupt erst.)

2) $\alpha(t) = (3\cosh t, 2\sinh t)$

a) $\alpha(t) = \left(\frac{3}{2}(e^{t}+e^{-t}), e^{t}-e^{-t}\right) = (x,y)$, $x > 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x + y = 2e^{t}$$

$$\frac{2}{3}x - y = 2e^{-t}$$



$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}x + y\right)\left(\frac{2}{3}x - y\right) = 4$$

$$\frac{4}{9}x^2 - y^2 = 4$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{2}\sqrt{4+y^2}}}$$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\frac{3}{2}\sqrt{4+y^2}} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{x} = -\frac{2}{3}$$

Asymptoten: $\underline{\underline{y = \pm\frac{2}{3}x}}$

b) $|\dot\alpha(t)| \to \min$

$$|\dot\alpha(t)| = |3\sinh(t), 2\cosh(t)| = \sqrt{9\cosh(t)^2 + 4\sinh(t)^2}$$

$$\frac{d}{dt}|\dot\alpha(t)| = \frac{1}{2}\left(9\cosh(t)^2 + 4\sinh(t)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(18\cosh(t)\sinh(t) + 8\sinh(t)\cosh(t)\right)$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t = 0}}, \quad \underline{\underline{|\dot\alpha(0)| = 3}}$$

Minimum, da einziger kritischer Punkt und für $t \to \pm\infty$ gilt $|\dot\alpha(t)| \to \infty$.

c) $k(t) = \dfrac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} = \dfrac{6\sinh(t)^3 - 6\cosh(t)^3}{(9\sinh(t)^2 + 4\cosh(t)^2)^{3/2}}$

$$\dot{k}(t) = \frac{(9\sinh(t)^2 + 4\cosh(t)^2)^{\frac{3}{2}}\,\cancel{6}(\sinh(t)^{\cancel{2}}\cosh(t) - \cosh(t)^{\cancel{2}}\sinh(t))\cdot 18}{\dots}$$

$$- \frac{\cancel{6}(\sinh(t)^3 - \cosh(t)^3)\cdot\frac{3}{2}\cancel{(9\sinh(t)^2 + 4\cosh(t)^2)}^{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{26}\,13\,\sinh(t)\cosh(t)}{\dots}$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow (9\sinh(t)^2 + 4\cosh(t)^2)(\sinh(t) - \cosh(t)) = 13(\sinh(t)^3 - \cosh(t)^3)$

$\Rightarrow (\sinh(t) - \cosh(t))(4\sinh(t)^2 + 13\sinh(t)\cosh(t) + 9\cosh(t)) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\sinh(t) = \cosh(t) \Rightarrow t = 0}$

oder

$4\sinh(t)^2 + 13\sinh(t)\cosh(t) + 9\cosh(t) = 0$

$\quad \shortparallel$

$(4\sinh(t) + 9\cosh(t))(\sinh(t) + \cosh(t))$

$\Rightarrow 4\sinh(t) = -9\cosh(t)$

$\Rightarrow 2(e^t - e^{-t}) = -\frac{9}{2}(e^t + e^{-t})$

$\Rightarrow 0 = -13e^t - 5e^{-t}$

$\Rightarrow -\frac{5}{13} = e^{2t}$ $\lightning$

Wegen des asymptotischen Verhaltens befindet sich bei $t=0$ ein Minimum. Der Krümmungsradius ist $|k(0)| = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$