4) $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{1+x^2}y(x) = 8$

$(1+x^2)\,y'(x) + 2x\,y(x) = 8x(1+x^2) \qquad f(x) := 1+x^2$

$f(x)y'(x) + f'(x)y(x) = 4f'(x)f(x)$

$(f(x)y(x))' = 2(f(x)^2)'$

$f(x)y(x) = 2f(x)^2 + c$

$y(x) = 2f(x) + \frac{c}{f(x)}$

$= 2 + 2x^2 + \frac{c}{1+x^2}$

$y(1) = 4 = 2 + 2 + \frac{c}{2} \implies c = 0$

$\underline{\underline{y(x) = 2 + 2x^2}}$

Aufg. 4

$$\frac{y'}{x} + \frac{2y}{1+x^2} = 8$$

Man sieht, dass $C(1+x^2)$ die Gleichung

$$\frac{y'}{x} + \frac{2y}{1+x^2} = \text{const}$$ löst

Einsetzen: $2C + 2C \overset{!}{=} 8$ liefert $C=2$

und $2(1+x^2) = y(x)$ erfüllt $y(1)=4$.

Systematischer:

Homogene Gl: $$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\ln y = -\ln(1+x^2)$$

$$y_H(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

Ansatz für part. Lsg:

$$y_p(x) = f(x) \cdot y_H(x)$$

$$= f(x)/(1+x^2)$$

(Variation der Konstanten)

und $f'(x) = \overbrace{8x}^{\text{Inhomogenität}} / y_H(x)$

$$f'(x) = 8x \cdot (1+x^2)$$
$$f(x) = 2(1+x^2)^2$$

$$\boxed{y_p(x) = 2(1+x^2)}$$

erfüllt Anfangsbed. also muss keine homogene Lsg addiert werden.