Kugelfunktionen und der Poissonkern in drei Dimensionen

Horst Knörrer

Auf der Vollkugel

$$B = \{x \in \mathbf{R^3} \,\Big|\, |\,\mathbf{x}| \le \mathbf{a}\}$$

betrachten das Dirichletproblem

$$\Delta u = 0 \qquad\qquad u\Big|_{\partial B} = f$$

mit einer vorgegebenen Funktion f auf der Sphäre $\partial B = \{x \in \mathbf{R^3} \,\Big|\, |\,\mathbf{x}| = \mathbf{a}\}$. Dazu führen wir Kugelkoordinaten r, θ, φ ein, so dass

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\theta \cos\varphi \\ x_2 &= r \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 &= r \cos\theta \end{aligned}$$

Dabei ist $r \ge 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Im Vergleich mit den Koordinaten r, ϑ, φ, die in der Analysisvorlesung verwendet wurden, ist $\theta = \frac{\pi}{2} - \vartheta$.

Der Laplaceoperator in diesen Koordinaten ist

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\ \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \end{aligned}$$

$\Delta_{\theta,\varphi}$ heisst der sphärische Laplaceoperator.

Um Lösungen der partiellen Differenzialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz der Separation der Variablen, d.h. wir suchen nach Lösungen der Form

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung und Multiplikation mit $\frac{r^2}{RY}$ ergibt

$$\frac{r^2\,\Delta_r R(r)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)}$$

Die linke Seite ist von θ und φ unabhänging, die rechte von r. Deshalb gibt es eine Konstante μ so dass

$$\frac{r^2\,\Delta_r R(r)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \mu$$

d.h.

$$\begin{aligned} r^2\,R''(r) + 2rR'(r) - \mu R(r) &= 0 \\ \Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi) + \mu\, Y(\theta,\varphi) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

In der zweiten Gleichung führen wir noch einmal Trennung der Variablen durch. D.h., wir machen den Ansatz

$$Y(\theta,\varphi) = T(\theta)\,F(\varphi)$$

Einsetzen und Multiplikation mit $\frac{\sin^2\theta}{T(\theta)\,F(\varphi)}$ ergibt

$$\frac{1}{T}\Big(\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial T}{\partial\theta}\Big) + \mu\,\sin^2\theta = -\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von θ ab, die rechte nur von φ. Es gibt also eine Konstante ν so dass

$$\begin{aligned} F''(\varphi) + \nu\,F(\varphi) &= 0 \\ \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial T}{\partial\theta} + (\mu\,\sin^2\theta - \nu)\,T &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$F(\varphi)$ ist 2π periodisch. Fourierentwicklung zeigt, dass die erste Gleichung in (2) nur dann eine Lösung hat, wenn $\nu = m^2$ mit $m \in \mathbf{Z}$, und die zugehörigen Lösungen sind Linearkombinationen von $e^{im\varphi}$ und $e^{-im\varphi}$.

Man kann nun zeigen, dass mit $\nu = m^2$ die zweite Gleichung des Systems (2) genau dann eine beschränkteLösung hat, wenn $\mu = \ell(\ell+1)$ mit einer ganzen Zahl $\ell \geq |m|$. Dann ist der Lösungsraum eindimensional; er wird erzeugt von einer Funktion $T_{\ell,m}(\cos\theta)$, die ein Polynom in $\cos\theta$ ist.

Für festes ℓ sind die $2\ell+1$ Funktionen

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}\,T_{\ell,m}(\cos\theta) \qquad \ell = 0,1,2,\cdots;\quad m = -\ell, -\ell+1, \cdots, \ell-1, \ell$$

linear unabhängige Lösungen der Gleichung

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_{\ell,m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell,m}$$

Wenn die Funktionen geeignet normiert werden, so gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{S^2} Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)\,\bar{Y}_{\ell',m'}(\theta,\varphi)\,d\omega = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \neq \ell' \text{ oder } \; m \neq m' \\ 1 & \text{falls } \ell = \ell' \text{ und } \; m \neq m' \end{cases}$$

Dabei ist $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ das Flächenelement auf der Sphäre.
Ferner sind die $Y_{\ell,m}$ ein "vollständiges Orthonormalsystem"; d.h. jede stückweise stetige Funktion $f(\theta,\varphi)$ auf S^2 lässt sich als Reihe

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) \tag{3}$$

schreiben. Aus der Orthogonalitätsrelation ergibt sich, dass die Koeffizienten

$$c_{\ell,m} = \int_{S^2} f(\theta,\varphi)\,\bar{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi)\,d\omega \tag{4}$$

Die Funktionen $Y_{\ell,m}$ heissen *Kugelfunktionen* (spherical harmonics).

Wenn in unserem ursprünglichen Ansatz der Separation der Variablen Y die Kugelfunktion $Y_{\ell,m}$ ist, so ist in (1) $\mu = \ell(\ell+1)$. Die bei $r = 0$ beschränkten Lösungen der Gleichung

$$r^2 R''(r) + 2r\,R'(r) - \ell(\ell+1)\,R(r) = 0$$

sind gerade die Vielfachen von r^ℓ.

Also liefert der Ansatz der Trennung der Variablen, dass jede konvergente Reihe der Form

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m}\, r^\ell\, Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

harmonisch ist. Falls unsere auf ∂B gegebene Funktion f in Kugelkoordinaten die Entwicklung (3) hat, so ist mit $A_{\ell,m} = \frac{c_{\ell,m}}{a^\ell}$ die Reihe u eine Lösung des Randwertproblems. Konkret ist die Lösung

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m}\, \left(\frac{r}{a}\right)^\ell\, Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

Setzt man die Darstellung (4) der $c_{\ell,m}$ in diese Reihe ein, so ergibt sich nach – allerdings längerer Rechnung – die Darstellung

$$u(x) = \frac{1}{4\pi a} \int\limits_{\partial B} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-x'|^3}\, f(x')\, d\omega(x')$$

Referenz: A.Nikifirov, V.Uvarov: Special Functions of Mathematical Physics. Birkhäuser 1988