

ETHZ, D-MAVT  
**Basisprüfung Lineare Algebra**  
Sommer 2010  
Prof. Ö. Imamoglu

**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

**1. [10 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \beta & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & \beta^2 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- a) Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt  $(1, 1, 1)^\top \in \text{Bild } B$ ?
- b) Für welche Werte  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $B$  singular?
- c) Bestimmen Sie Rang  $B$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$ .
- d) Bestimmen Sie eine Basis von Kern  $B$  für den Fall  $\alpha = \beta = 4$ .

**2. [8 Punkte]** Sei  $\mathcal{P}_2$  der reelle Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Sei  $\mathcal{B} = \{b^{(1)} := 1, b^{(2)} := x, b^{(3)} := 5x^2 - 3\}$

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren aus  $\mathcal{B}$  orthogonal sind im Bezug zu dem Skalarprodukt:

$$(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)x^2 dx$$

- b) Sei  $p(x) := -x^2 + 1$ . Schreiben Sie  $p(x)$  in den Koordinaten der Basis  $\mathcal{B}$ .
- c) Zeigen Sie, dass  $(\cdot, \cdot)$  aus Teilaufgabe a) in der Tat ein Skalarprodukt in  $\mathcal{P}_2$  ist.

3. [10 Punkte] Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von  $A$ . Geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.
- b) Finden Sie eine Matrix  $T$ , so dass  $D = T^{-1}AT$  diagonal ist.
- c) Sei  $A$  in MATLAB schon eingegeben. Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements an, um die Matrizen  $T$  und  $D$  aus Teilaufgabe **b)** durch MATLAB aus einer allgemeinen Matrix  $A$  berechnen zu lassen und als  $T$  bzw.  $D$  zu speichern.

4. [10 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $\dot{y} = Ay$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit der Transformationsmethode.
- b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen  $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ , für welche die zugehörigen Lösungen  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  gegen Null streben für  $t \rightarrow +\infty$ .
- d) Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements, um die folgende Matrix zu definieren:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3^{7/2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. [8 Punkte] Sei  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  der reelle Vektorraum der reellen  $2 \times 2$ -Matrizen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von  $V$  sind und geben Sie allenfalls eine Basis an:

- a)  $U = \{A \in V \mid A^T = -A\}$
- b)  $W = \{A \in V \mid \det(A) = 0\}$
- c)  $Y = \left\{ A \in V \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

**Viel Erfolg!**