

D-MAVT, ETH Zürich
Lineare Algebra
Lösung der Prüfung Sommer 2011
Prof. N. Hungerbühler

1. a) Der Vektor $b = (1, -4, 3)^\top$ liegt genau dann in Bild A , wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist. Dies prüfen wir mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 4 & 4-8\beta & -20 & | & -4 \\ -1 & 8\beta-4 & \alpha+9 & | & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & 4-8\beta & 0 & | & 0 \\ 0 & 8\beta-4 & \alpha+4 & | & 2 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & 4-8\beta & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Das transformierte Gleichungssystem ist lösbar, wenn $\alpha \neq -4$ gilt (man beachte, dass der Diagonaleintrag der zweiten Zeile Null sein darf, weil die rechte Seite der zweiten Zeile Null ist). Somit liegt b in Bild A für $\alpha \neq -4$.

- b) In Aufgabe a) wurde die Matrix A in Zeilenstufenform gebracht. Daraus lässt sich der Rang ablesen:

$$\text{Rang } A = 3 \Leftrightarrow \alpha \neq -4 \text{ und } \beta \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{Rang } A = 1 \Leftrightarrow \alpha = -4 \text{ und } \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rang } A = 2 \Leftrightarrow \text{ansonsten, d.h. entweder } \alpha = -4 \text{ oder } \beta = \frac{1}{2}$$

- c) Wegen der Formel $\dim \text{Kern } A + \text{Rang } A = 3$ ist der Rang von A genau dann 1, wenn 0 ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit 2 ist. Somit ist 0 ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit 2, wenn $\alpha = -4$ und $\beta = \frac{1}{2}$ ist.

In diesem Fall hat das Gaussverfahren in a) die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

geliefert. Somit ist Kern A durch die Gleichung $x_1 = 5x_3$ gegeben, wobei x_2 und x_3 freie Parameter sind. Eine mögliche Basis von Kern A ist somit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bitte wenden!

Da der Rang von A in diesem Fall 1 ist, bildet jede von Null verschiedene Spalte von A eine Basis von Bild A , z.B.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. a) Berechnung der Eigenwerte mit Entwicklung der Determinante nach der zweiten und dritten Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_4) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2((2 - \lambda)^2 - 1) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda)(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ mit algebraischen Vielfachheiten 2, 1 und 1. Lösen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i I_4)x = 0$ liefert die Eigenräume:

$$E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Somit ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 gleich 2 und diejenige der Eigenwerte 1 und 3 gleich 1.

- b) Gemäss der Berechnung der Eigenvektoren in a) gilt $D = T^{-1}AT$ für

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

- c) Ja, T kann orthogonal gewählt werden, weil A symmetrisch ist. In diesem Fall muss man nur noch die dritte und vierte Spalte normieren, weil die Spalten bereits orthogonal aufeinander stehen. Daher ist ein solches T durch

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

gegeben.

3. a) Das Polynom

$$2 \cdot (x^3 + 1) + 1 \cdot (x^2 + x - 2) - 1 \cdot (2x + 1) + 3 \cdot (x + 2) = 2x^3 + x^2 + 2x + 5$$

hat die Koordinaten $(2, 1, -1, 3)^\top$ bezüglich \mathcal{B} .

b) Es gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + 1) + (x^2 + x - 2) + 2 \\ &= (x^3 + 1) + (x^2 + x - 2) + \frac{2}{3}((2x + 4) - (2x + 1)) \\ &= (x^3 + 1) + (x^2 + x - 2) - \frac{2}{3}(2x + 1) + \frac{4}{3}(x + 2). \end{aligned}$$

Daher sind $(1, 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})^\top$ die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich \mathcal{B} .

Variante: In der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ rechnen. Dann muss das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelöst werden.

- c) Ein allgemeines Polynom $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ steht senkrecht auf $q(x) = x$ genau dann, wenn

$$\langle a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, x \rangle = \int_0^1 (a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x) dx = \frac{a_3}{5} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{2} = 0$$

gilt. Der Unterraum der Polynome in \mathcal{P}_3 , die senkrecht auf $q(x)$ stehen, ist also durch eine nichttriviale lineare Gleichung bestimmt und hat somit die Dimension $4 - 1 = 3$ (a_3 , a_2 und a_1 können als freie Parameter betrachtet werden). Durch Wählen von geeigneten a_3 , a_2 und a_1 bekommen wir drei linear unabhängige Polynome, die eine Basis dieses Unterraums bilden, zum Beispiel

$$\underline{\{5x^3 - 2, 2x^2 - 1, 3x - 2\}}$$

(diese sind klarerweise linear unabhängig, weil die Monome x^3 , x^2 und x jeweils nur in einem dieser Polynome auftreten).

Bitte wenden!

4. a) Berechnung der Eigenwerte von A mit Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 6 & 6 \\ 2 & -5 - \lambda & -6 \\ -2 & 6 & 7 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 - \lambda)((-5 - \lambda)(7 - \lambda) + 36) - 2(6(7 - \lambda) - 36) - 2(-36 + 6(5 + \lambda)) \\ &= (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 12 + 12\lambda + 12 - 12\lambda = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Die Matrix hat also die Eigenwerte 1 und -1 .

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren (mit dem Gauss-Algorithmus):

$$\begin{aligned}A - I_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 2 & -6 & -6 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \implies E_1 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ A + I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 2 & -4 & -6 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \implies E_{-1} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Der Eigenwert 1 hat somit die geometrische Vielfachheit 2 und der Eigenwert -1 die geometrische Vielfachheit 1. Die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist also 3 und A ist diagonalisierbar. Daher lässt sich die allgemeine Lösung als

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

schreiben.

- b) Die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

erhalten wir durch Einsetzen der Lösung $c = (c_1, c_2, c_3)^\top$ von

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die allgemeine Lösung. Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Rückwärtseinsetzen liefert $c = (1, 0, 1)^\top$. Die gesuchte spezielle Lösung ist somit

$$\underline{\underline{y(t) = e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .}}$$

- c) Die allgemeine Lösung in a) strebt gegen $(0, 0, 0)^\top$ für $t \rightarrow -\infty$ genau dann, wenn $c_3 = 0$ gilt. In diesem Fall lautet die Anfangsbedingung

$$y(0) = \begin{pmatrix} 3c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchten Anfangsbedingungen sind also

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 3c_1 + 3c_2 \\ y_2(0) &= c_1 \\ y_3(0) &= c_2 \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5. Prinzip: i -te Spalte der Darstellungsmatrix ist das Bild des i -ten kanonischen Basisvektors $e_i \in \mathbb{R}^3$ unter der betrachteten Abbildung.

a)

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Diese Matrix ist orthogonal, weil ihre Spalten eine orthonormale Basis von \mathbb{R}^3 bilden (oder: weil eine Spiegelung längen- und winkeltreu ist).

Bitte wenden!

b)

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Diese Matrix ist nicht orthogonal, weil sie nicht invertierbar ist (eine Spalte ist Null).

c)

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Diese Matrix ist orthogonal, weil ihre Spalten eine orthonormale Basis von \mathbb{R}^3 bilden (oder: weil eine Drehung längen- und winkeltreu ist).

d)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Diese Matrix ist ebenfalls orthogonal, weil sie ein Produkt von zwei orthogonalen Matrizen ist (oder: weil ihre Spalten eine orthonormale Basis bilden bzw. weil eine Zusammensetzung einer Spiegelung und Drehung längen- und winkeltreu ist).