Studiengang Architektur — Mathematisches Denken — SS 2005

Übungsserie 4

Abgabe der (ohne TR) gelösten Aufgaben: **Donnerstag 9. Juni 2005**

1. [6P.] **Abstrakte Gruppen**: Welche der folgenden Zahlenmengen bilden bezüglich der Zahlen-Multiplikation (Zeichen $\cdot$) eine Gruppe? Ist die Gruppe endlich oder unendlich, kommutativ oder nicht-kommutativ?

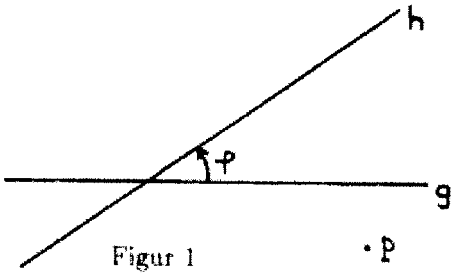
$\mathbb{R}^-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{G}$	Menge der positiven, geraden Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen

Verifizieren Sie im Falle einer Gruppe alle Gruppenaxiome, anderenfalls genügt es, das 'erste', nicht erfüllte Gruppenaxiom anzugeben und anhand eines Zahlen-Beispiels zu verdeutlichen

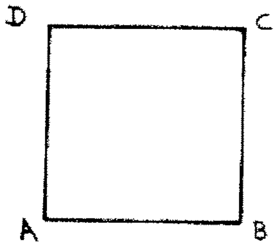
2. [6P.] **Verkettung von Geradenspiegelungen**: Zwei Geraden g und h schneiden sich unter dem Winkel φ ($0 < \varphi < 180°$). Orientierung des Winkels: Im Gegenuhrzeigersinn 'von g nach h' (Figur 1).

   (a) Untersuchen Sie die Verkettung $S_h \circ S_g$ der Geradenspiegelungen S_g und S_h! Anleitung: Mit Hilfe von Satz 2.9 (vgl. Notizen zur Vorlesung) bestimmen Sie den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder $P' = S_g(P)$ und $P'' = S_h(P')$ eines gewählten Punktes P die entsprechende kennzeichnende Grösse ausgedrückt mit φ.

   (b) Untersuchen Sie die Spezialfälle $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ sowie die Verkettung $S_g \circ S_h$ ('zuerst S_h, dann S_g').



Figur 1



Figur 2

3. [6P.] Symmetrien des **Quadrates** (des regulären Vierecks)

   (a) Ermitteln Sie alle Kongruenztransformationen, welche das Quadrat (Figur 2) mit sich selbst zur Deckung bringen. (Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein.)

   (b) Stellen Sie die zugehörige Verknüpfungstafel auf bzw. zur Vereinfachung nur den 'rechten, oberen Teil der Tafel bis und mit der Diagonale'.

4. [6P.] Ein **Zaubertrick**: Denken Sie sich zwei beliebige positive reelle Zahlen, z. B. $a_1 = 2$ und $a_2 = 5$, und ermitteln Sie daraus die Zahlen $a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ gemäss dem *Bildungsgesetz* $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ (Jede Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden, d.h. für $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ also $7, 12, 19, 31, \ldots$. *Dann gilt stets*: Die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nähern sich für $n \to \infty$ immer mehr dem Verhältnis ϕ des Goldenen Schnitts an.

   Seien nun a_1, a_2 fest gewählt und a_n die mit dem Bildungsgesetz ermittelten Zahlen.

Übungsserie 4

(a) Zeigen Sie: $a_{n+1} = f_n \cdot a_2 + f_{n-1} \cdot a_1$ $(n \geq 2)$, wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist. (Anleitung: Setzen Sie $b_{n+1} := f_n \cdot a_2 + f_{n-1} \cdot a_1$ und zeigen Sie, dass $b_3 = a_3$, $b_4 = a_4$, und dass das rekursive Bildungsgesetz $b_{n+1} + b_n = \cdots = b_{n+2}$ erfüllt ist. Dann gilt $b_n = a_n$)

(b) Zeigen Sie: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\phi a_2 + a_1}{a_2 + \frac{1}{\phi} a_1} = \cdots = \phi$ (... und der Zaubertrick ist bewiesen.)

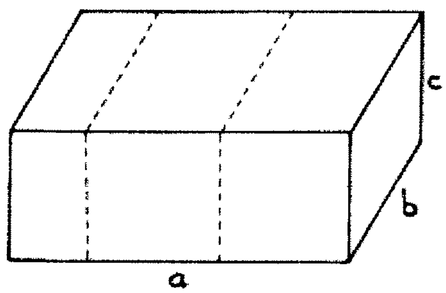
5. [6P.] Wird von einem Goldenen Rechteck ein Quadrat abgespalten, so entsteht wiederum ein Goldenes Rechteck. Durch eine ähnliche Eigenschaft lässt sich ein so genannter **Goldener Quader** *definieren*: Werden von einem Goldenen Quader zwei Quader mit quadratischer Grundfläche abgespalten, so erhält man wiederum einen (massstäblich verkleinerten!) Goldenen Quader (Figur 3).

   (a) Setzen Sie zur Vereinfachung der Rechnung die mittlere Kantenlänge $b := 1$ und berechnen Sie die anderen beiden Kantenlängen a und c des Quaders. (Tipp: $a^3 - 2a - 1 = (a+1)(a^2 - a - 1)$)

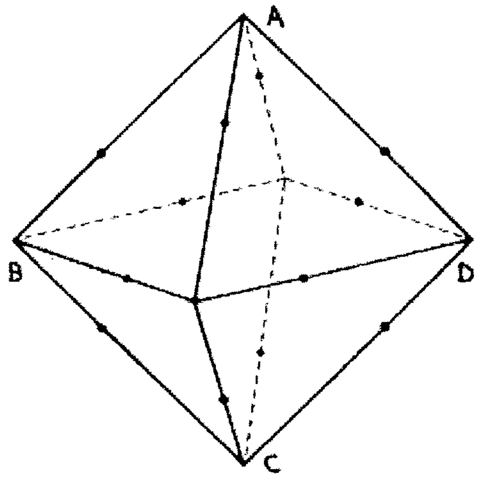
   (b) Wie gross ist das Volumen eines Goldenen Quaders mit $b = 1$? Welche Seitenflächen des Goldenen Quaders haben die Form eines Goldenen Rechtecks?

6. [6P.] Zeigen Sie: Werden die Kanten eines **regulären Oktaeders** in geeigneter Weise nach dem Goldenen Schnitt geteilt , so sind die zwölf entstehenden Punkte die Ecken eines **regulären Ikosaeders** (Figur 4).

   (Anleitung: Benutzen Sie den Sachverhalt von Aufgabe 2.5 (vgl. Notizen zur Vorlesung, S. 55))



Figur 3



Figur 4

① $\mathbb{R}^-$ keine Gruppe, denn $s,t \in \mathbb{R}^-: s\cdot t > 0$, z.B. $(-1)\cdot(-2) = 2$
(G1) nicht erfüllt

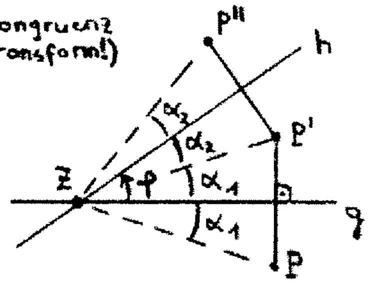
$\mathbb{G}$ Keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{G}: \; e\cdot t = t\cdot e = t \to e = 1$ ungerade, d.h. $\notin \mathbb{G}$
(G3) nicht erfüllt

$\mathbb{N}$ Keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{N}: \; t\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot t = 1$ (Neutralelement) $\leadsto t^{-1} = \frac{1}{t} \notin \mathbb{N}$
(G4) nicht erfüllt z.B. $t = 2$, $t^{-1} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{R}^+$ unendliche, kommutative Gruppe: (G1) Für beliebige $s,t \in \mathbb{R}^+$ gilt stets $s\cdot t \in \mathbb{R}^+$
(G2) Für beliebige $r,s,t \in \mathbb{R}^+$ gilt stets: $(r\cdot s)\cdot t = r\cdot(s\cdot t)$ (G3) $1 \in \mathbb{R}^+$ und $t\cdot 1 = 1\cdot t = t$, alle $t \in$
(G4) Zu $t \in \mathbb{R}^+$ gibt es $\frac{1}{t} =: t^{-1} \in \mathbb{R}^+$ mit $t\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot t = 1$ (KG) Für $s,t \in \mathbb{R}^+$ gilt $s\cdot t = t\cdot s$

---

② (a) Der Schnittpunkt Z von g und h ist Fixpunkt von $S_h \circ S_g$ (Kongruenztransform!) (da Fixpunkt von S_g und von S_h) Nach Satz 2.9 ist $S_h \circ S_g$ entweder eine Rotation um Z, eine Geradenspiegelung oder die Identität. $S_h \circ S_g$ ist nicht die Identität, da $P \neq Z$ kein Fixpunkt ist (P wird um Z um den Winkel $\alpha = 2\varphi$ gedreht) $S_h \circ S_g$ ist keine einzige Geradenspiegelung, da eine alleine die Orientierung ändert, zwei nacheinander jedoch nicht. $S_h \circ S_g$ ist also eine Rotation um Z, und zwar mit $\alpha = 2\varphi$ wie der Punkt P zeigt.

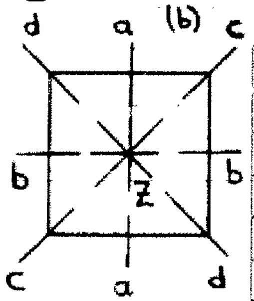


$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\varphi$

(b) $\varphi = 0°$, d.h. $g \equiv h$ also $S_h \circ S_g = S_g \circ S_g = I$ (Identität)
$\varphi = 90°$, d.h. $\alpha = 2\varphi = 180°$ $\quad S_h \circ S_g = R_{Z,180°}$ (Halbdrehung / Punktspiegelung)
$S_g \circ S_h = R_{Z,\alpha}$ mit $\alpha = -2\varphi$ (Drehung im Uhrzeigersinn um $|2\varphi|$: $P'' \to P' \to P$)

③ (a) I; $R_{Z,90°}$; $R_{Z,180°}$; $R_{Z,270°}$; S_a; S_b; S_c; S_d

(b)



$\circ$	I	$R_{Z,90°}$	$R_{Z,180°}$	$R_{Z,270°}$	S_a	S_b	S_c	S_d
I	I	$R_{Z,90°}$	$R_{Z,180°}$	$R_{Z,270°}$	S_a	S_b	S_c	S_d
$R_{Z,90°}$		$R_{Z,180°}$	$R_{Z,270°}$	I	S_d	S_c	S_a	S_b
$R_{Z,180°}$			I	$R_{Z,90°}$	S_b	S_a	S_d	S_c
$R_{Z,270°}$				$R_{Z,180°}$	S_c	S_d	S_b	S_a
S_a					I	$R_{Z,180°}$	$R_{Z,90°}$	$R_{Z,270°}$
S_b						I	$R_{Z,270°}$	$R_{Z,90°}$
S_c							I	$R_{Z,180°}$
S_d								I

④ (a) $b_3 \underset{n=2}{=} \underset{=1}{f_2} a_2 + \underset{=1}{f_1} a_1 = 1\cdot a_2 + 1\cdot a_1 = a_3$, $\quad b_4 \underset{n=3}{=} \underset{=2}{f_3} a_2 + \underset{=1}{f_2} a_1 = \underbrace{2a_2}_{a_2+a_2} + a_1 = a_2 + \underbrace{a_2 + a_1}_{a_3} = a_4$

$b_{n+1} + b_n = (\underline{f_n a_2} + f_{n-1} a_1) + (\underline{f_{n-1} a_2} + f_{n-2} a_1) = \underbrace{(f_n + f_{n-1})}_{f_{n+1}} a_2 + \underbrace{(f_{n-1} + f_{n-2})}_{f_n} a_1 = a_{n+2}$

Bildungsgesetz der Fibonacci-Zahlen: f_{n+1} $\quad f_n$

Serie

4 (b) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(f_n \cdot a_2 + f_{n-1} \cdot a_1)\frac{1}{f_{n-1}}}{(f_{n-1} \cdot a_2 + f_{n-2} \cdot a_1)\frac{1}{f_{n-1}}} = \frac{\frac{f_n}{f_{n-1}} a_2 + a_1}{a_2 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} a_1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{(\phi a_2 + a_1)}{(a_2 + \frac{1}{\phi} a_1)}$$

denn nach Satz 2.8: $\frac{f_n}{f_{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \phi$ und $\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}\right)^{-1} \longrightarrow \phi^{-1}$

schliesslich: $$\frac{(\phi a_2 + a_1)}{(a_2 + \frac{1}{\phi} a_1)} \cdot \frac{\phi}{\phi} = \frac{(\phi a_2 + a_1)\cdot \phi}{a_2 \phi + a_1} = \underline{\underline{\phi}}$$

5 (a)

	Grosser	Kleiner
Länge:	a	$b=1$
	$b=1$	c
	c	$a-2c$

Faktor: $\frac{a}{b} = \lambda = \frac{b}{c} \leftrightarrow ac = b^2 \overset{=1}{} \rightarrow c = \frac{1}{a}$ (1)

$\frac{a}{c} = \lambda = \frac{b}{a-2c} \leftrightarrow a^2 - 2ac = bc \overset{=1}{}$ (2)

(1) in (2): $a^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot \frac{1}{a} \;\; \| \cdot a \;\; \leftrightarrow a^3 - 2a = 1 \leftrightarrow \underbrace{a^3 - 2a - 1}_{(a+1)(a^2-a-1)} = 0 \;\; \| : \underbrace{(a+1)}_{\neq 0}$

$a^2 - a - 1 = 0 \rightsquigarrow a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; a_2 = \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{<0}$ ↯

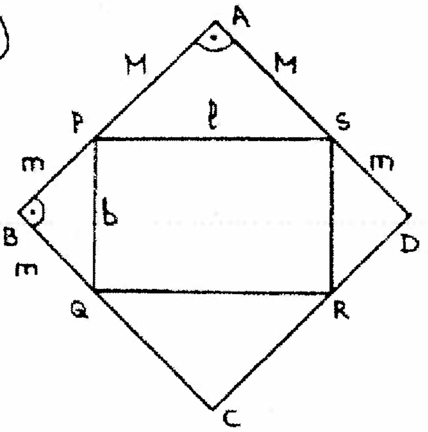
Also: $\underline{\underline{a}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$, $\underline{\underline{c}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\phi} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

(b) Volumen $V = a \cdot b \cdot c = \phi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\phi} = \underline{1}$

Bei einem Goldenen Rechteck stehen Länge und Breite im Verhältnis ϕ:

Grund- und Deckfläche: $\frac{a}{b} = \phi$; rechte und linke Seitenfläche: $\frac{b}{c} = \phi$

6



Die 6 Ecken und 12 Kanten des Oktaeders sind genau die Ecken und Seiten dreier paarweise senkrecht aufeinanderstehender Quadrate. In jedem Quadrat (z.B. ABCD) bilden die 4 Punkte (PQRS) ein Goldenes Rechteck:

$$\frac{l}{b} = \frac{\sqrt{M^2+M^2}}{\sqrt{m^2+m^2}} = \frac{\sqrt{2M^2}}{\sqrt{2m^2}} = \frac{\sqrt{2}\,M}{\sqrt{2}\,m} = \frac{M}{m} = \phi$$ Verhältnis des GS.

Gemäss Agb 2.5 bilden drei paarweise senkrecht aufeinanderstehende Goldene Rechtecke (Abbildung) ein reguläres Ikosaeder.