Studiengang Architektur

Mathematisches Denken

Übungsserie 3

SS 2006

Abgabe der (ohne TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 12. Mai 2006**

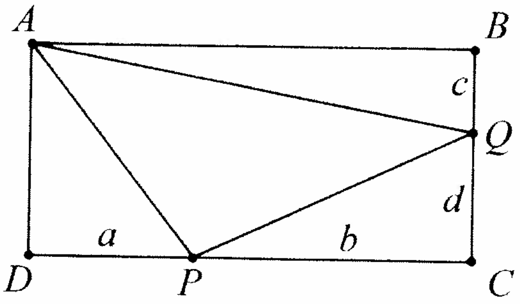
1. **Platonische Körper:**
   (a) Lässt sich ein **Buchstabenwürfel** herstellen, bei dem alle 26 Buchstaben mit gleicher Wahrscheinlichkeit erscheinen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.
   (b) Welche Platonischen Körper sind punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt?
   (c) Was ist jeweils die kleinst- bzw. die grösstmögliche Eckenzahl im Umriss eines regulären Tetraeders, Würfels und Oktaeders?

2. Was für **konvexe Polyeder** gibt es, die aus lauter Dreiecken und/oder Vierecken aufgebaut sind und in deren Ecken stets genau drei Kanten zusammenstossen?
   (a) Untersuchen Sie mittels der **Eulerschen Polyederformel** alle Möglichkeiten.
   (b) Skizzieren Sie von jedem möglichen Typ einen möglichst regulären Vertreter.
   (c) Skizzieren Sie einen **nicht** konvexen Polyeder, der aus lauter Dreiecken und/ oder Vierecken aufgebaut ist.

3. **Skalenverhalten:** (eventuell ist für die Berechnungen ein TR nötig)
   (a) Figur 1 zeigt zwei Breitmaulnashörner. Das Muttertier hat eine Masse von 2000 kg. Bestimmen Sie unter der Annahme von Skalenverhalten durch Messung und Rechnung einen Näherungswert für die Masse des Jungtiers.
   (b) Steigt ein Mensch aus dem Wasser, so haftet eine Wasserschicht von ca. 0.4 mm Dicke an seiner Haut. Um welchen Faktor muss man einen Mensch der Masse 60 kg und Oberfläche 150 dm^2 massstäblich verkleinern, sodass die Masse der Wasserschicht (wieder 0.4 mm dick) gleich gross ist, wie seine Körpermasse? (Bei einer nassen Maus entspricht die Masse der Wasserschicht gerade ungefähr dem Körpergewicht der Maus, während sie bei einer Fliege ein Mehrfaches des Eigengewichts beträgt.)

4. Gegeben ist ein **Rechteck** $ABCD$. Dem Rechteck soll ein Dreieck APQ (Figur 2) mit Ecke P auf der Rechteckseite CD und Q auf BC so einbeschrieben werden, dass die drei dabei entstehenden Dreiecke alle den gleichen Flächeninhalt haben.
   (a) Zeigen Sie, dass für die Seitenabschnitte a, b, c und d gilt: $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.
   (b) Berechnen Sie $x := \frac{b}{a}$ und damit die Lage von P auf CD bzw. von Q auf BC. (Zur Vereinfachung der Rechnung kann $a = 1$ gesetzt werden.)

Figur 1 (Aufgabe 3)



Figur 2 (Aufgabe 4)

Bitte wenden!

Studiengang Architektur | Mathematisches Denken | SS 2006

Übungsserie 3

5. Der **Felsendom** in Jerusalem ist ein wichtiger Pilgerort des Islam und eine heilige Stätte der Juden! Dem Gebäude liegt ein reguläres **Achteck** zugrunde (Figur 3).

   Im Zentrum des Grundrisses steht ein Quadrat mit Seitenlänge s, an dessen Eckpunkten die vier inneren Hauptsäulen des Innenraumes stehen. Dieses Quadrat um 45° gedreht ergibt ein weiteres Quadrat. Verlängert man die Seiten dieser Quadrate ergibt sich ein regelmässiger Achtstern, dessen Spitzen die Standorte der acht äusseren Säulen des Innenraumes markieren. Schliesslich hat auch die Aussenmauer die Form eines regulären Achtecks.

   Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des sternförmigen Innenraumes (ausgedrückt mit der Seitenlänge s).

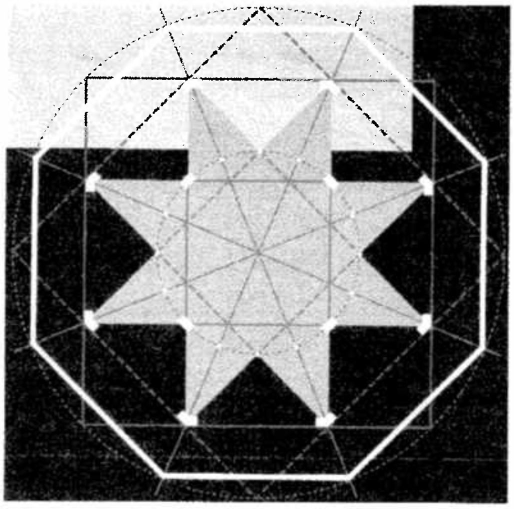
6. Durchdringen sich wie abgebildet zwei gleichartige, reguläre Tetraeder mit Kantenlänge a, entsteht ein Sternkörper: Die **Stella Octangula** (Figur 4). (Die Kantenmitten des einen Tetraeders fallen mit jenen des anderen zusammen und werden als Ecken der Stella Octangula aufgefasst.)

   (a) Um was für einen speziellen Körper handelt es sich beim gemeinsamen Innenraum der beiden Tetraeder? (Genaue Bezeichnung und Kantenlänge angeben)

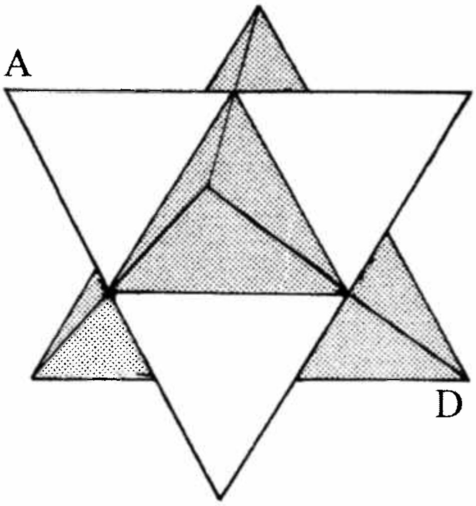
   (b) Was für einen speziellen Körper spannen die Spitzen der Stella Octangula auf? (Genaue Bezeichnung und Kantenlänge angeben) Welchen Volumeninhalt besitzt der Raum zwischen diesem Körper und der Stella Octangula?

   (c) Ermitteln Sie die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen der Stella Octangula und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel.

   (d) Die Stella Octangula wird entlang der Körper-Diagonalen AD betrachtet. Skizzieren Sie den bei dieser Betrachtung wahrgenommenen Körperumriss. (Seitenlänge(n) der Umrissfigur angeben)



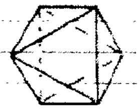
Figur 3 (Aufgabe 5)



Figur 4 (Aufgabe 6)

① (a) Nein. Ein solcher "Würfel" müsste ein <u>regulärer Polyeder</u> mit 26 Flächen sein. Einen solchen regulären Polyeder gibt es aber nicht. (siehe Satz 2.1)

		Tetraeder	Würfel		Oktaeder	Dodekaeder		Ikosaeder
(b)	punktsymm.	Nein	Ja	$\overset{\text{dual}}{\overline{\qquad}}$	Ja	Ja	$\overset{\text{dual}}{\overline{\qquad}}$	Ja
(c)	kleinstmöglich	3	4		4			
	grösstmöglich	4	6		6 ←			



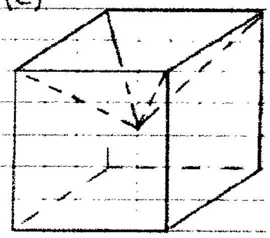
② (a) f_3, f_4: Anzahl Dreiecke bzw. Vierecke

① $3e = 2K$ (In jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen, jede Kante wird dabei zweimal gezählt.)

② $3f_3 + 4f_4 = 2K$ (Jede 3-Eckfläche hat 3 Kanten, jede 4-Eckfläche 4, jede Kante wird dabei zweimal gezählt)

$$\underline{2} = e - K + f \overset{①}{=} \underbrace{\tfrac{2}{3}K - K}_{=-\frac{1}{3}K} + f_3 + f_4 \overset{②}{=} -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{2}f_3 + 2f_4\right) + f_3 + f_4 = \underline{\tfrac{1}{2}f_3 + \tfrac{1}{3}f_4}$$

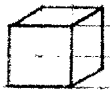
(c)



(b) Möglichkeiten:

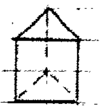
Typ:

$f_3 = 0,\ f_4 = 6$ Würfel



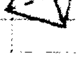
$f_3 = 1,\ f_4 = 4.5$ ↯

$f_3 = 2,\ f_4 = 3$ Prisma



$f_3 = 3,\ f_4 = 1.5$ ↯

$f_3 = 4,\ f_4 = 0$ Tetraeder



③ (a) Höhe Muttertier: 3.4mm
Jungtier: 2.7mm

Längenfaktor: $\lambda = \frac{27}{34} \approx 0.8$

Masse Jungtier: $\lambda^3 \cdot 2000\,\text{kg} = 1024\,\text{kg} \approx \underline{\underline{1000\,\text{kg}}}$

(b) Masse der Wasserschicht bei normaler Grösse: $\underbrace{0.4\,\text{mm}}_{0.004\,\text{dm}} \cdot 150\,\text{dm}^2 \cdot 1\,\text{kg/dm}^3 = 0.6\,\text{kg}$

Längenfaktor: λ
Oberflächenfaktor: λ^2
Massen/Volumenfaktor: λ^3

Wasserschicht:

$$0.4\,\text{mm} \cdot \lambda^2 \cdot 150\,\text{dm}^2 \cdot 1\tfrac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \lambda^3 \cdot 60\,\text{kg} \quad \| : \lambda^2$$

$$0.6\,\text{kg} = \lambda \cdot 60\,\text{kg} \rightsquigarrow \lambda = \underline{\underline{\tfrac{1}{100}}}$$

④ (a)

$$\left.\begin{aligned} F_{\Delta ADP} &= \tfrac{1}{2}a(c+d) \\ F_{\Delta AQB} &= \tfrac{1}{2}(a+b)c \end{aligned}\right\} = \rightsquigarrow ac + ad = ac + bc \quad \| -ac$$

$$ad = bc \longleftrightarrow \underline{\underline{\tfrac{d}{c} = \tfrac{b}{a}}}$$

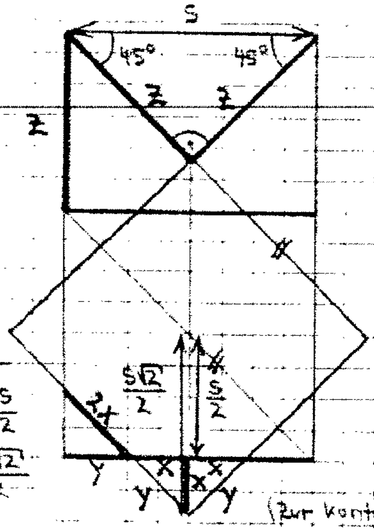
(b)

$$\left.\begin{aligned} F_{\Delta AQB} &= \tfrac{1}{2}(\overset{\swarrow 1}{a} + b)c \\ F_{\Delta PCQ} &= \tfrac{1}{2}bd \end{aligned}\right\} = \rightsquigarrow (1+b)c = bd \quad \| : c$$

$$1 + b = b \cdot \underbrace{\tfrac{d}{c}}_{=\frac{b}{a}=b} = b^2$$

Somit $b^2 - b - 1 = 0 \rightsquigarrow b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Verhältnis des GS! d.h $\underline{\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

⑤



zur Kontrolle

$x = \frac{s\sqrt{2}}{2} - \frac{s}{2}$

$y = s - \frac{s\sqrt{2}}{2}$

Zackenlänge: $z^2 + z^2 = s^2$

$\sqrt{2}\,z = s$

$z = \frac{s}{\sqrt{2}}$

Sternumfang $u = 16z = 16 \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} = \cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot 8\frac{s}{\cancel{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{8\sqrt{2}\,s}}$

Kronenfläche: $F_{\boxtimes} = F_{\square} - F_{\triangledown} = z \cdot s - \frac{1}{2} z \cdot z$

$= \frac{s^2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{2}$

Sternfläche $F = 4 \cdot F_{\boxtimes} + F_{\square} = 4\left(\frac{s^2}{\sqrt{2}} - \frac{s^2}{4}\right) + s^2$

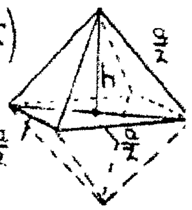
$= 2\sqrt{2}\,s^2 - s^2 + s^2 = \underline{\underline{2\sqrt{2}\,s^2}}$

(Zur Kontrolle anderer Lösungswege sind weitere Grössen beschriftet

⑥ (a) 8 gleichseitige Dreiecke ⇝ reguläres Oktaeder mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$

(b) 6 Quadrate → Würfel mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

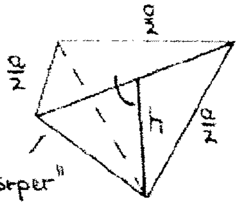
$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}$



$V_{\text{zwischen}} = V_{\text{Würfel}} - (2V_{\text{Tetra}} - V_{\text{Okta}}) = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2\overset{\text{Bsp 2.1 Skript}}{\frac{\sqrt{2}}{12}}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2}\right)$

$= a^3\frac{\sqrt{2}}{4} - a^3\frac{\sqrt{2}}{6} + a^3\frac{\sqrt{2}}{24} = \underline{\underline{a^3\frac{\sqrt{2}}{8}}}$

oder:



"Auffüllkörper"

$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$V_{\text{zwischen}} = 12\,V_{\text{Auffüll}} = 12 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}}_{h}\right)$

$= 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2}$

$= \underline{\underline{\frac{a^3\sqrt{2}}{8}}}$

(c) $e = 5 + 4 + 5 = 14$, $f = 8 \cdot 3 = 24$, $K = 36$,

$e - K + f = 14 - 36 + 24 = 2$ ✓

(d)

regelmässiger sechszackiger Stern