Musterlösung Serie 4

Aufgabe 1. Ist G die triviale Untergruppe $G = \{\mathrm{Id}\}$, dann ist für jedes $p \in E$

$$s(p) = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} \mathrm{Id}(p) = \mathrm{Id}(p),$$

und s damit die Identitätsabbildung.

Aufgabe 2. Sei $p \in E$, g die Gerade, die durch p geht und orthogonal zu w steht und x der Schnittpunkt von w und g. Dann ist laut Vorlesung $s(p)$ ein Fixpunkt von s_w und demnach enthalten in w. Ausserdem ist $s(p)$ ein Fixpunkt der Spiegelung s_g, denn

$$\begin{aligned} s_g(s(p)) &= s_g\left(\frac{1}{2}(\mathrm{Id}(p) + s_w(p))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(s_g(p) + s_g(s_w(p))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(p + s_w(p)\right) = s(p), \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit der zweiten Zeile gilt, nach dem Beweis von Lemma II.2(1) und die Gleichheit der letzten Zeile gilt, weil p und $s_w(p)$ auf g liegen. Demnach liegt $s(p)$ auf g. Es folgt, dass

$$s(p) \in w \cap g = \{x\}.$$

Also ist $s(p) = x$, die orthogonale Projektion von p auf w.

Aufgabe 3. Falls $n = 1$, dann ist $G = \left\langle d_{2\pi} \right\rangle = \{\mathrm{Id}\}$ die triviale Untergruppe und s wie in Aufgabe 1 die Identitätsabbildung. Sei nun $n \neq 1$ und $p \in E$. Wir identifizieren E mit der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Dann ist die Rotation d_ρ von p um den Nullpunkt mit Winkel ρ gegeben durch

$$d_\rho(p) = p \cdot e^{i\rho}.$$

Es folgt dass

$$\begin{aligned} s(p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_{\frac{2\pi k}{n}}(p) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p \cdot e^{\frac{2\pi k i}{n}} \\ &= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi k i}{n}}. \end{aligned}$$

Allerdings ist

$$\left(e^{\frac{2\pi n i}{n}} - 1\right) = 0$$

und lässt sich faktorisieren als

$$\left(e^{\frac{2\pi n i}{n}} - 1\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}}.$$

Da $e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1 \neq 0$ folgt daraus, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} = 0$$

und nach Multiplikation mit $e^{\frac{2\pi i}{n}}$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi k i}{n}} = 0.$$

Wir schliessen, dass $s(p) = 0$. Da $p \in E$ beliebig war ist s die Abbildung die E identisch auf 0 abbildet.

Aufgabe 4. Laut Vorlesung ist die Diedergruppe $G = D_n$ gegeben durch

$$D_n = \{d, d^2, \ldots, d^n, s_1 \circ d, s_1 \circ d^2, \ldots, s_1 \circ d^n\},$$

wobei d die Drehung um den Nullpunkt mit Winkel $2\pi/n$ ist und s_1 die Spiegelung an der x-Achse ist. Ist $n = 1$, dann ist $G = D_1 = \{\mathrm{Id}, s_1\}$ und s gegeben durch die orthogonale Projektion auf die x-Achse, wie in Aufgabe 2. Sei nun $n \neq 1$ und $p \in E$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
s(p) &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} d^k(p) + \sum_{\ell=1}^{n} (s_1 \circ d^\ell)(p)\right) &(1)\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{\ell=1}^{n} (s_1 \circ d^\ell)(p) &(2)\\
&= \frac{1}{2}s_1\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} d^\ell(p)\right) &(3)\\
&= \frac{1}{2}s_1(0) &(4)\\
&= 0 &(5)
\end{aligned}$$

wobei die Gleichungen 2 und 4 aus Aufgabe 3 folgen und die Gleichung 3 folgt aus dem Beweis von Lemma II.2(1). Da $p \in E$ beliebig war folgt, dass s die euklidische Ebene identisch auf 0 abbildet.