1 Vorbemerkungen

1.1 Mathematik zwischen Formalismus und Anschauung

Ich möchte mit einigen allgemeinen Bemerkungen zur Sprache der Mathematik beginnen und auf Aspekte aufmerksam machen, die ich als besonders wichtig ansehe. Mathematik zu treiben bedeutet generell, mathematische Objekte wie Zahlen, Funktionen, Gleichungen, Ungleichungen, Mengen, Räume, Gruppen und viele weitere zu untersuchen, also wichtige Fragen über diese Objekte zu beantworten und interessante Sätze über sie zu beweisen, aber auch neue Theorien zu entwickeln für vorher noch nicht untersuchte Objekte, ... sicher müsste man diese Liste fortsetzen. All dies spielt sich immer gleichzeitig auf zwei Ebenen ab: der formalen Ebene und der Ebene der abstrakten Anschauung.

Auf der formalen Ebene drücken wir mathematische Sachverhalte aus, indem wir logische und mathematische Symbole zu Formeln verbinden, und führen Beweise, indem wir aus Aussagen, die wir bereits als wahr erkannt haben, durch Anwendung strenger logischer Gesetze neue wahre Aussagen herleiten. Diese Ebene entspricht derjenigen eines Computerprogramms. Ein Programm, das ein Computer ausführen kann, muss strengen syntaktischen und semantischen Regeln gehorchen. Der Computer kann nicht erraten, was der Autor meint, wenn ein wesentliches Detail fehlt, und kann es nicht korrigieren, wenn der Autor etwas Falsches geschrieben hat; und Einwände der Art, es sei natürlich so oder so gemeint gewesen, lässt er nicht gelten. Die formale Sprache der Mathematik ist genauso stringent. Von Mathematikern wird verlangt, dass sie alles, was sie sagen, korrekt und vollständig und unmissverständlich mit allen notwendigen Details auf der formalen Ebene ausdrücken und begründen können. Dies zu lernen und zu üben wird vor allem jetzt im Basisjahr von Ihnen erwartet.

Gleichzeitig wollen wir als Menschen die Welt, also auch die Welt der Mathematik, verstehen und unsere Erkenntnisse darüber anderen Menschen mitteilen. Dazu brauchen wir eine abstrakte Anschauung für die mathematischen Objekte, mit denen wir arbeiten. Wir brauchen ein Verständnis jenseits der formalen Ebene, um erkennen zu können, was wichtig oder unwichtig, nützlich oder unnütz, interessant oder langweilig ist, also um die irrsinnige Menge an Formeln überhaupt zu überblicken und uns beim Umgang damit in die richtige Richtung leiten zu lassen. Wir brauchen dieses Verständnis auch, um zu wissen, welche mathematischen Theorien wir in welcher Situation ausserhalb der Mathematik anwenden können.

Fast jede Kommunikation in der Mathematik erfolgt gleichzeitig auf beiden Ebenen. Wenn ich zum Beispiel in der Geometrie sage: „Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte“, so ist das einerseits das sprachliche Äquivalent der formalen Aussage „$\forall g \in \mathcal{G}\ \exists P \in g\ \exists Q \in g : P \neq Q$“, wenn $\mathcal{G}$ die Menge aller Geraden bezeichnet. Andererseits haben wir dabei eine Vorstellung davon, was ein Punkt und eine Gerade sei und was es bedeutet, ob zwei Punkte gleich oder verschieden sind, und dadurch bekommt die Aussage für uns eine anschauliche Bedeutung. Für den Formalismus ist diese Bedeutung irrelevant, für uns Menschen aber nicht. Wir Menschen können Mathematik nur betreiben, indem wir uns gleichzeitig auf beiden Ebenen be-

wegen. Wir können weder rein auf der formalen Ebene operieren, weil wir dann nichts verstünden, noch allein auf der Anschauungsebene, weil wir dann nichts beweisen und somit als wahr oder falsch erkennen könnten.

Nebenbei gesagt ist es grundsätzlich immer möglich und erlaubt, einen mathematischen Formalismus mit einer anderen als der ursprünglich vorgesehenen Anschauung zu versehen. Wenn wir zum Beispiel die Menge aller Schuhschachteln $\mathcal{G}$ nennen und jedes Element $g \in \mathcal{G}$ eine Menge von Schuhen ist, dann bedeutet die oben genannte formale Aussage, dass jede Schuhschachtel mindestens zwei verschiedene Schuhe enthält. Das ist völlig in Ordnung, soweit auch die weiteren postulierten Eigenschaften der Theorie in der neuen Interpretation gelten (was in diesem Beispiel allerdings zweifelhaft erscheint).

Um uns frei auf beiden Ebenen bewegen zu können, müssen wir dazu fähig sein, nach Belieben von der einen auf die andere zu wechseln. Das heisst: Wir müssen alles in die jeweils andere Ebene übersetzen können. Was immer wir auf deutsch, englisch, oder sonst einer natürlichen Sprache sagen, müssen wir auch in mathematischen Formeln ausdrücken können. Umgekehrt sollten wir uns selbst genauso wie anderen stets erklären können, was eine gegebene Formel anschaulich bedeutet. Beides müssen wir ständig praktizieren, während wir mathematische Gedanken entwickeln, aber insbesondere auch auf Nachfrage dann, wenn wir jemand anderem unsere Gedanken mündlich oder schriftlich mitteilen wollen und uns der Adressat um die Übersetzung bittet, damit er genau versteht, was wir meinen. Das ist eine der wichtigsten Grundfähigkeiten, die Sie erwerben sollen. Mängel an dieser Stelle sind oft ein Haupthindernis gegen ein erfolgreiches Mathematikstudium, und darum sollten Sie diese Fähigkeit vor allem im Basisjahr ausführlich einüben.

Sie werden erleben, dass wir zwar zu Beginn sehr auf formale Genauigkeit und Vollständigkeit pochen, dies aber bald reduzieren und uns viele explizite und implizite Abkürzungen erlauben. Das liegt daran, dass die Welt der Mathematik so reichhaltig und komplex ist, dass wir gar nicht dazu in der Lage sind, stets alles so vollständig auszudrücken, wie es die anerkannten Regeln eigentlich erfordern würden. Unsere formalen Aussagen sind also leider oft nicht ganz vollständig, und sogar den besten Mathematikern unterlaufen gelegentliche Irrtümer und sie schreiben formal etwas anderes, als sie tatsächlich meinen. Auch Dozenten von Anfängervorlesungen können keine Vollständigkeit erreichen, schon allein, weil wir gar nicht die Zeit haben, alles auf der formalen Ebene vollständig auszuschreiben. Das wird Ihnen das Verständnis des Stoffs erschweren, bis Sie etwas mehr mathematische Reife entwickelt haben.

Dazu baut der meiste Stoff in der Mathematik auf anderem, davor besprochenem Stoff auf. Dieser wird als bekannt und selbstverständlich vorausgesetzt und nicht weiter diskutiert. Mathematik auf hohem Niveau zu verstehen ist vergleichbar damit, die Funktionsweise eines komplexen elektronischen Geräts wie z.B. eines Handys zu verstehen. Dieses besteht aus verschiedenen Einzelteilen, darunter einem Mikroprozessor, der aus Modulen mit verschiedenen Aufgaben besteht, welche auf bestimmte Weise miteinander interagieren und wiederum in kleinere Einheiten unterteilt sind, bis hin zu Flip-Flops, welche selbst wieder aus einzelnen Transistoren und Widerständen zusammengesetzt sind; daneben läuft auf diesem Mikroprozessor ein Programm, wel-

ches ebenfalls eine geschachtelte Struktur hat, usw. Die Grundlage der elektronischen Bauteile und deren Verdrahtung kann man als Analogon der formalen Ebene der Mathematik, das Interagieren der Module auf den höheren Ebenen als Analogon der Anschauungsebene interpretieren. Genauso entsprechen die einzelnen Befehle des Programms in Maschinensprache der formalen Ebene, seine Gesamtstruktur dagegen der Anschauungsebene der Mathematik. Die Funktionsweise des Geräts als Ganzes kann man nur vollständig erfassen, wenn man auf jeder dieser Komplexitätsebenen Bescheid weiss. Nicht mehr und nicht weniger als das Entsprechende in der Mathematik wird von Ihnen erwartet.

Fast jede mathematische Mitteilung ist also sowohl formal unvollständig als auch darin, dass sie andere Begriffe als bekannt voraussetzt. Die Lösung dieses Problems besteht darin, dass man von Mathematikern erwartet, dass sie alles, was sie sagen, auf Nachfrage hin präziser und vollständiger ausdrücken und erklären und die verwendeten Grundlagen ergänzen können. Auch von Ihnen wird erwartet, dass Sie alles, was Sie lernen, auf der formalen und der Anschauungsebene vollständig erfassen. Solange Sie nicht sicher sind, dass Sie das tun, müssen Sie eben nachfragen, und sollen das auch. Hier kommt es wesentlich auf Ihre eigene Initiative an. Auf Ihre Nachfrage hin erhalten Sie von uns entweder die gewünschten Details, oder Hinweise dazu, wie Sie sich diese Details selbst erarbeiten können.

In jedem Fall ist mathematische Erkenntnis ein aktiver Prozess. Wie beim Fahrradfahren-Lernen geht es darum, gewisse Abläufe so einzuüben, dass sie mit der Zeit automatisch werden. Dabei muss das Gehirn an bestimmten Stellen umverdrahtet werden, und das geschieht nur durch viel Übung und ständige aktive Mitarbeit. Dieser Prozess ist mit Teilerfolgen, aber auch Rückschlägen und Schmerzen verbunden, denn wie man beim Fahrradfahren-Lernen gelegentlich hinfällt, gehört es zur Mathematik, dass man manchmal Fehler begeht und sich dies von anderen sagen lassen muss. Daran muss man sich gewöhnen und es nicht überbewerten. Versuchen Sie zu erreichen, was die folgende Maxime besagt: Mathematiker zeichnen sich den meisten anderen Menschen gegenüber dadurch aus, dass sie sich darüber freuen, wenn man ihnen einen Denkfehler nachweist, weil sie den Erkenntnisgewinn höher bewerten als die damit verbundene Peinlichkeit. Dazu sollten Sie natürlich auch lernen, Ihre eigenen Aussagen ständig auf Korrektheit und Klarheit und Vollständigkeit zu überprüfen. Insgesamt erfordert mathematische Erkenntnis also eine erhebliche psychische Anstrengung, mit der man aber auch einen enormen Gewinn erzielen kann. Das ähnelt der physischen Anstrengung, die man braucht, um auf einen sehr hohen Berg steigen und dort die einzigartige Aussicht geniessen und sich als einer von relativ wenigen Menschen sagen zu können: Das habe ich aus eigener Kraft getan.

1.2 Die Grobstruktur mathematischer Kommunikation

Mathematische Kommunikation, ob mündlich oder schriftlich, folgt gewissen Regeln, im Grossen wie im Kleinen. Im Grossen geschieht Folgendes: Man führt mathematische Objekte ein, trifft Annahmen über sie und zieht schrittweise Folgerungen daraus, beweist also Sätze über sie. Die folgenden Aspekte sind dabei besonders wichtig:

Zuerst müssen die verwendeten Begriffe und Symbole erklärt werden, und zwar bevor man sie benutzt, sofern sie nicht zum gemeinsamen Standardrepertoire aller Beteiligten gehören. Genauso muss gesagt werden, aus welcher Menge die gebrauchten Variablen gewählt werden sollen. Ohne diese Erklärungen kann der Adressat nicht wissen, was gemeint ist. Es ist sehr lästig für diesen, nachfragen zu müssen, was denn damit und damit gemeint sei. Eine vernünftige mathematische Mitteilung beginnt daher oft mit einer Einleitung der Art: „Sei ... ein ... mit der Eigenschaft ..., und sei ...“

Die Variablendeklaration funktioniert genau wie in einer höheren Programmiersprache. Dort hat man die Möglichkeit, Variablen mit einem wohldefinierten Gültigkeitsbereich zu deklarieren, zum Beispiel in einem Unterprogramm. Wie in der Mathematik muss man dort zuerst sagen, welcher Art die Variable sein soll, bevor man sie verwenden darf. (Gewisse ältere Programmiersprachen, die implizite Konventionen für Variablennamen erlauben, verleiten zu Fehlern und sollten heute nicht mehr benutzt werden.) In der Mathematik definiert jeder Quantor einen Gültigkeitsbereich für die quantifizierte Variable, ausserhalb dessen die Variable entweder keinen Sinn ergibt oder, falls sie vorher schon eine Bedeutung hatte, so nimmt sie diese nach Ende des Gültigkeitsbereichs des Quantors wieder an, unabhängig von allem, was während der Gültigkeit des Quantors geschah. Ein Beweis ist wie ein Unterprogramm; was innerhalb eines Beweises eingeführt worden ist, ergibt ausserhalb keinen Sinn.

Wichtig ist, dass Anfang und Ende von Unterstrukturen deutlich markiert werden. Wie für Klammerungen in mathematischen Formeln, insbesondere für Quantoren, muss klar sein, wo eine Definition beginnt und endet, wo ein Satz beginnt und endet, wo ein Beweis beginnt und endet. Der Standard ist auch, dass man das Ende eines Beweises, an dem man also erklärt, dass eine vorher angegebene Behauptung nun bewiesen sei, besonders markiert. Das kann man mit Worten tun wie z.B. „was zu beweisen war“, oder entsprechend lateinisch „quod erat demonstrandum“, meist abgekürzt zu „q.e.d.“, oder ähnlichem. Üblich ist auch das Symbol „□“, der Übersichtlichkeit halber oft am rechten Rand des Textes, wie am Ende des vorliegenden Absatzes. Wenn man dieses Symbol verwendet, so sollte man es aber korrekt tun und nicht etwa als Zeichen für „irgendetwas endet hier“: □

Kleine, mittlere, und grosse Sätze unterscheidet man wie folgt: Einen zentralen Satz einer Theorie nennt man oft Hauptsatz. Das Wort Theorem entspricht dem englischen und französischen Wort für Satz; im deutschen wird es oft für einen grossen Satz verwendet. Einen mittleren oder kleinen Satz, dessen Aussage man im Rahmen der zu entwickelnden Theorie für relevant hält und später weiter zu benutzen gedenkt, nennt man oft Proposition. Das ist lateinisch für Behauptung, das deutsche Wort Behauptung benutzt man jedoch in der Regel nur für eine Zwischenbehauptung innerhalb eines Beweises, für welche man sich ausserhalb des Beweises nicht mehr interessiert. Ein Korollar oder eine Folge ist ein Satz, der mit wenig Aufwand aus einem grösseren Satz folgt. Ein Lemma ist ein kleiner Satz, der dazu dient, eine Proposition oder einen Satz zu beweisen, der aber nicht selbst von Interesse ist. Ein Lemma, das nur dazu dient, ein anderes Lemma zu beweisen, heisst Sublemma. Ein Lemma kann für sich alleine oder innerhalb eines Beweises auftreten. Oft enthält es eine mehr oder weniger hässliche formale Aussage im Rahmen einer Rechnung, wogegen der dazugehörige grössere Satz

eine griffigere strukturelle Eigenschaft ausdrückt. Wenn man einen mathematischen Text überfliegt, orientiert man sich vor allem an den Definitionen und grösseren Sätzen und lässt Beweise und Lemmata beim ersten Durchgang oft ganz beiseite. Gelegentlich hat man im Nachhinein festgestellt, dass ein ursprünglich als Lemma ausgedrückter Sachverhalt doch eine fundamentale Bedeutung hat. Als man darauf das Lemma zu einem Satz befördern wollte, hatte sich die Bezeichnung Lemma schon eingebürgert, und darum behielt man sie bei. Ein typisches Beispiel dafür ist das Zornsche Lemma.

Formal gesehen ist ein Beweis eine endliche Folge von Aussagen, von denen jede entweder ein Axiom oder eine früher bewiesene Aussage ist oder mittels einer Schlussregel aus im Beweis davor stehenden Aussagen folgt, so dass die letzte Aussage des Beweises die zu beweisende Aussage ist. Zum vollständigen Aufschrieb eines Beweises gehört, für jede Aussage zu erklären, wieso sie gilt. Wenn zum Beispiel eine Aussage direkt aus der unmittelbar vorhergehenden folgt, so kann man dies mit einem Doppelpfeil $\Rightarrow$ anzeigen. Wenn dabei noch eine bestimmte Grundeigenschaft oder ein Satz der Theorie benutzt wird, so muss man dies ebenfalls erwähnen. Wenn eine Aussage aus einer früheren Aussage oder einer Kombination von solchen folgt, so muss man auch dies irgendwie aufzeigen. Ein verständlicher Beweis ist also nicht eine blosse Folge von Aussagen oder Formeln, sondern erfordert für jeden Schritt eine Begründung. Sonst ist er lückenhaft und wird zu Recht nicht akzeptiert. Genauso ist eine Berechnung, zum Beispiel eines Integrals, nicht bloss eine Folge von Umformungen einer mathematischen Formel, sondern eine Folge von Umformungen mit jeweiligen Begründungen.

1.3 Vorbilder

Zu Beginn versuchen wir in den Vorlesungen, jeden elementaren Rechen- und Beweisschritt auszuschreiben und zu begründen. Das Gleiche verlangen wir von Ihnen in den Übungsaufgaben. Das verlangen wir auch dann noch, wenn wir in der Vorlesung schon längst aus Zeitgründen damit begonnen haben, bestimmte Details zu überschlagen. Denn als Mathematiker/innen im Werden müssen Sie diese Grundlagen noch lange üben, bis sie für Sie selbstverständlich geworden sind. Sie müssen erst noch das richtige Gefühl dafür entwickeln, welche Details wichtig und welche weniger wichtig sind. Darum sind in den Übungsaufgaben, und natürlich genauso in den Klausuren, grundsätzlich alle Details aufzuschreiben und alle Begründungen explizit anzugeben.

Gute Vorbilder dafür finden Sie in vielen Skripten und Lehrbüchern, aber nicht notwendigerweise in allen. In meinen eigenen Vorlesungen bestehe ich darauf, dass die Musterlösungen der Übungsaufgaben mustergültig sind, aber auch das ist nicht überall so. Am besten ist es, Sie bilden sich selbst eine fundierte Meinung darüber, was für Sie mustergültig ist und was nicht. Vielleicht wählen Sie sich ein Vorbild und versuchen ihm nahezukommen, denken aber auch später einmal daran zu überprüfen, ob Sie nicht noch andere Vorbilder finden. Auf höherem Niveau sind die renommiertesten Fachzeitschriften in der Regel gute Vorbilder.

Trotz unvermeidbarer Lücken hoffe ich, dass auch der Inhalt meiner Vorlesung diesen Anforderungen entspricht und Vorbildcharakter hat. Jedoch wird mein Tafelanschrieb

allein keineswegs vorbildlich sein. Denn vieles, was ich mündlich dazu sage und was auch wichtig ist, werde ich aus Zeitgründen nicht anschreiben. Insbesondere werde ich viele Begründungen nur mündlich angeben. Darum wird es auch nicht ausreichen, dass Sie nur den Tafelanschrieb kopieren, sondern Sie sollten sich die wichtigsten mündlichen Nebenbemerkungen ebenfalls merken.

1.4 Die Sprache der Prädikatenlogik

Mathematische Formeln bestehen im Innern aus Konstanten, Variablen, Funktionen und Relationen. Mit diesen Symbolen kann man Aussagen wie $1 + 1 = 2$ und $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ausdrücken. Solche einzelnen Aussagen werden verbunden mit den logischen Symbolen 'und' $\wedge$, 'oder' $\vee$, 'nicht' $\neg$, 'impliziert' $\to$, 'dann und nur dann, wenn' oder 'genau dann, wenn' $\leftrightarrow$, sowie den Quantoren 'für alle' $\forall$ und 'es existiert' $\exists$. Der etwas weniger allgemeingebräuchliche Quantor $\exists!$ bedeutet 'es existiert ein und nur ein' oder 'es existiert genau ein'. Klammern der Form $(\ldots)$ oder $[\ldots]$ dienen dazu, Teilformeln zusammenzufassen und eindeutig festzulegen, wie sie als Teil einer grösseren Formel aufzufassen sind. Gelegentlich haben sie wie Mengenklammern $\{\ldots\}$ auch spezielle Bedeutungen.

Ein Quantor bezieht sich immer auf eine nachfolgende Aussage; zum Beispiel steht „$\exists x\ C(x)$“ für „Es existiert ein x mit der Eigenschaft $C(x)$“. Meist schreibt man „$\forall x \in X : C(x)$“ als Abkürzung für „$\forall x : (x \in X) \to C(x)$“ und „$\exists x \in X : C(x)$“ als Abkürzung für „$\exists x : (x \in X) \wedge C(x)$“ und analog für $\exists!$. Der Doppelpunkt dient hier nur dazu, verschiedene Formelteile besser auseinanderhalten zu können, und hat keine weitere mathematische Bedeutung. Einen Doppelpunkt oder senkrechten Strich benutzt man auch, um durch eine Eigenschaft eine Teilmenge einer Menge zu spezifizieren in der Form $\{x \in X : C(x)\} = \{x \in X \mid C(x)\}$. Für Zuweisungen verwendet man das Symbol $:=$, wobei der Doppelpunkt stets auf der Seite des Symbols steht, dem die andere Seite als Wert zugewiesen wird, wie in $x := 2$.

Die Implikation $A \to B$ als Teil einer mathematischen Formel ist zu unterscheiden von der Folgerung „Wenn A gilt, dann gilt B“ oder der Begründung „Da A gilt, folgt B“ als Teil der natürlichen menschlichen Sprache. In letzteren beiden Fällen behauptet man die Folgerung aufgrund eines inneren Zusammenhangs zwischen den Aussagen A und B. Solche Folgerungen ziehen wir oft im normalen Leben und ständig, wenn wir Mathematik betreiben. Sie sind nicht als Teil von Formeln anzusehen, sondern erklären die Beziehung zwischen verschiedenen Formeln.

Bei der Implikation $A \to B$ als Teil einer mathematischen oder logischen Formel wird dagegen kein innerer Zusammenhang zwischen A und B verlangt, schon weil man gar nicht formal spezifizieren kann, was das genau bedeuten soll. Stattdessen sieht man die Implikation einfach dann als wahr an, wenn B wahr ist oder wenn A falsch ist, und als falsch nur dann, wenn B falsch ist und A wahr. Insbesondere kann die Implikation den Wahrheitswert „falsch“ annehmen und beliebig als Teil einer grösseren Formel auftreten.

Entsprechendes gilt für die Beziehung zwischen der Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ als Teil einer

Formel und Aussagen der Form „A gilt dann und nur dann, wenn B gilt“ in der natürlichen Sprache.

Natürlich führt das zu einer gewissen Verwirrung. Experten der mathematischen Logik empfehlen, Implikation und Äquivalenz als Teile von Formeln mit einfachen Pfeilen zu bezeichnen, solche ausserhalb dagegen mit den Doppelpfeilen $\Rightarrow$ and $\Leftrightarrow$ abzukürzen. Die Unterscheidung hat sich unter Mathematikern jedoch noch nicht durchgesetzt. Ich versuche dennoch in dieser Vorlesung, mich an die beschriebene Konvention zu halten.

Die vorigen Bemerkungen sind auch ein Beispiel dafür, dass man die Symbole der Prädikatenlogik nicht einfach als Abkürzung für Teile der natürlichen Sprache ansehen sollte. Ein weiteres Beispiel sind Quantoren. In einem natürlichen Satz ist es z.B. in Ordnung zu sagen, „dass $x-x=0$ ist für alle reellen Zahlen x“. In diesem Fall steht die Quantifizierung „für alle x“ nach der quantifizierten Aussage „$x-x=0$“; die Regeln der natürlichen Sprache sorgen dennoch dafür, dass wir in diesem wie in den meisten Fällen eindeutig verstehen, was gemeint ist. Im mathematischen Formalismus dagegen gelten strengere Regeln, aus guten Gründen. Wie für Computerprogramme hat man dort festgelegt, dass jeder Quantor vor der durch ihn quantifizierten Aussage stehen muss. Dadurch wird die Gültigkeit des Quantors eindeutig festgelegt für den Bereich von dem Quantor bis zum Ende der Formel oder der nächsten schliessenden Klammer, die zu einer vor dem Quantor stehenden öffnenden Klammer gehört. Ohne Beachtung dieser Regel käme man bald zu Formeln der Art „$\exists x\, D(x,y)\, \forall y$“, bei denen keine eindeutige logische Präzedenz der Quantoren mehr auszumachen ist. Die Beachtung der Regel macht dagegen den entscheidenden Unterschied zwischen Formeln deutlich, bei denen Quantoren vertauscht wurden, wie z.B. bei

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists w \in \mathbb{C} : w^2 = z \quad \text{gegenüber} \quad \exists w \in \mathbb{C}\ \forall z \in \mathbb{C} : w^2 = z.$$

Beim Umgang mit dem Allquantor $\forall$ ist weiter zu bemerken — und das ist etwas gewöhnungsbedürftig — dass im Fall der leeren Menge $X = \varnothing$ jede Aussage der Form „$\forall x \in X : C(x)$“ wahr ist. Das liegt nicht etwa daran, dass die leere Menge doch irgendwelche Elemente hätte, sondern daran, dass die Aussage ja bedeutet „$\forall x : (x \in X) \to C(x)$“ und die Implikation „$(x \in X) \to C(x)$“ immer wahr ist, wenn die Voraussetzung „$x \in X$“ falsch ist. Dies gilt auch dann, wenn $C(x)$ eine von vorneherein absurde Aussage über x ist. Zum Beispiel ist die Aussage „Jedes Element der leeren Menge ist ein grosser grüner Bär, der sein eigener Vater ist,“ wahr.

Missverständnisse mit der leeren Menge können auch dadurch entstehen, dass man ihre Eigenschaften mit den Eigenschaften ihrer Elemente verwechselt. Zum Beispiel gibt es bekanntlich keine reelle Zahl x mit der Eigenschaft $x+1<x$. Dagegen gibt es durchaus eine Menge reeller Zahlen X mit der Eigenschaft $\forall x \in X : x+1<x$, nämlich die leere Menge $X=\varnothing$. Um solche Verwechslungen zu vermeiden, sollte man sich stets genau überlegen, worauf sich ein Quantor bezieht und worauf nicht.

Man muss sich dessen bewusst sein, dass, wenn eine Menge X leer oder möglicherweise leer ist, uns dies nicht verbietet, über Elemente von X zu sprechen. Dass wir dies können und dürfen, ist sogar essentiell wichtig. Wenn wir zum Beispiel für alle Elemente x einer Menge X eine Aussage $C(x)$ beweisen wollen, so können wir dies oft

durch einen Widerspruchsbeweis erreichen, indem wir annehmen, es gäbe ein Gegenbeispiel, das heisst, ein Element der Menge $X' := \{x \in X \mid \neg C(x)\}$. In diesem Fall versuchen wir zu zeigen, dass die Menge X' leer ist, indem wir die Eigenschaften eines hypothetischen Elements x erkunden und schliesslich zu einem Widerspruch führen. Wir sprechen also absichtlich über ein Element einer Menge, von der wir in Wirklichkeit hoffen, dass sie leer ist. Die Schlussfolgerungen, die wir dabei benutzen, werden ja nicht falsch, wenn die Anfangsvoraussetzung, es gäbe ein Element $x \in X'$, falsch ist; im Gegenteil, bei einer falschen Voraussetzung A wird eine Implikation $A \to B$, wie oben besprochen, ja erst recht richtig. Für mathematische Beweise, insbesondere für Widerspruchsbeweise, müssen wir also argumentieren können, ohne zu wissen, ob die Voraussetzungen überhaupt erfüllbar sind. Die Regeln darüber, wann zusammengesetzte Aussagen der Form $A \to B$ u.a. richtig sind, ermöglichen uns genau das.

Eine gute Übung für den Umgang mit dem mathematischen Formalismus besteht darin, beliebige Sätze der natürlichen Sprache in die Sprache der Prädikatenlogik zu übersetzen und umgekehrt. Wenn zum Beispiel X die Menge aller Menschen bezeichnet, so kann man die Aussage „Jeder Mensch hat einen Vater“ formal ausdrücken durch „$\forall x \in X\ \exists y \in X : (y \text{ ist Vater von } x)$“. Dass dieser Vater dann auch noch eindeutig ist, kann man ausdrücken durch „$\forall x \in X\ \exists!\, y \in X : (y \text{ ist Vater von } x)$“, oder ausgeschrieben durch

$$\forall x \in X\ \exists y \in X : (y \text{ ist Vater von } x) \wedge \forall z \in X : (z \text{ ist Vater von } x) \to z = y.$$

Üben Sie insbesondere den Umgang mit Implikationen und Quantoren. Ein weiteres Beispiel: Wenn ich sage: „Jedesmal, wenn ich Stöckelschuhe trage, fühle ich mich unsicher auf den Beinen“, so ist diese Aussage in meinem Fall nicht etwa deshalb richtig, weil ich zwar selten, aber eben doch manchmal Stöckelschuhe tragen und mich dann aus Mangel an Übung unsicher fühlen würde, sondern deshalb, weil ich es nie tue. Aus demselben Grund ist die Aussage „Jedesmal wenn ich Stöckelschuhe trage, habe ich einen Sechser im Lotto“ in meinem Fall wahr; trotzdem hatte ich leider noch nie einen Hauptgewinn.

Die Übersetzung zwischen natürlicher Sprache und Prädikatenlogik ist nie ganz eindeutig, und es ist auch eine gute Übung, verschiedene äquivalente Übersetzungen zu finden. Zum Beispiel ist die Implikation $A \to B$ äquivalent zu ihrem Kontrapositiv $\neg B \to \neg A$ sowie zu $\neg A \vee B$, die Aussage $\neg\exists x : C(x)$ ist äquivalent zu $\forall x : \neg C(x)$, die Aussage $\neg\forall x : C(x)$ ist äquivalent zu $\exists x : \neg C(x)$, und anderes mehr.

1.5 Widersprüche

Ein berühmter Widerspruchsbeweis ist Russells Paradoxon. Ein Paradoxon ist ein vermeintlicher Widerspruch in einer Theorie. Eine Grundkonstruktion der Mengenlehre besagt, dass man zu einer beliebigen formalen Eigenschaft $C(x)$ für Elemente x einer beliebigen Menge X eine Teilmenge $Y := \{x \in X \mid C(x)\}$ spezifizieren kann mit der Eigenschaft: $\forall x \in X : x \in Y \leftrightarrow C(x)$. Wenn wir dies akzeptieren, und es eine „Menge aller Mengen“ gäbe, so gäbe es auch eine Teilmenge davon, deren Elemente genau

diejenigen Mengen sind, welche sich nicht selbst enthalten. Russells Paradoxon zeigt aber, dass es eine solche Menge nicht geben kann:

Satz: Es gibt keine Menge S mit der Eigenschaft, dass S genau diejenigen Mengen enthält, welche sich nicht selbst enthalten. In Symbolen, wenn M die Kollektion aller Mengen bezeichnet: $\neg\exists S \in M\ \forall X \in M : X \in S \leftrightarrow X \notin X$.

Beweis: Sei doch S eine Menge mit der genannten Eigenschaft. Dann können wir diese Eigenschaft insbesondere auf die Menge $X := S$ anwenden und erhalten die Folgerung $S \in S \leftrightarrow S \notin S$. Das bedeutet, dass die Aussage $S \in S$ wahr ist genau dann, wenn sie falsch ist. In jedem Fall ist diese Äquivalenz ein Widerspruch. Somit muss die Annahme, dass es eine solche Menge S gibt, falsch sein. **q.e.d.**

Russells Paradoxon hat zur Folge, dass man neue Mengen nicht allein durch Eigenschaften definieren kann wie in $\{x \mid C(x)\}$, sondern dass man bei der Konstruktion neuer Mengen immer irgendwie von bereits bekannten Mengen ausgehen muss wie z.B. in $\{x \in X \mid C(x)\}$ oder der Bildung von Potenzmengen. Die heute allgemein akzeptierten Axiome der Mengenlehre nach Zermelo und Fränkel leisten genau dies. Ob diese aber auf irgendeinem anderen Weg zu einem Widerspruch führen, wissen wir nicht. Aus einem fundamentalen Satz von Gödel folgt sogar, dass es gar nicht möglich ist, ihre Widerspruchsfreiheit zu beweisen, wenn sie denn widerspruchsfrei sind. Eine vollständige Klärung der logischen Grundlagen unserer Disziplin bleibt uns also endgültig verwehrt.

Wenn wir bei unserer mathematischen Tätigkeit auf einen Widerspruch stossen, ist es theoretisch immer möglich, dass dies ein Widerspruch ist, der das gesamte auf der Mengenlehre errichtete Gebäude der Mathematik zum Einsturz bringt. In der Praxis hat sich aber bisher jeder solche vermeintliche Widerspruch als Folge eines Irrtums herausgestellt.

1.6 Irrtümer

Auch in der Mathematik liegt der Teufel im Detail, und die Möglichkeiten, Fehler zu begehen, sind grenzenlos. Ich will hier nur einige Fallen erwähnen, in die auch erfahrene Mathematiker immer wieder tappen.

Ein verbreiteter Irrtum besteht darin, mathematische Objekte ohne nachzudenken als verschieden anzusehen, wenn sie verschiedene Namen tragen. Dabei dürfen natürlich verschiedene Symbole dasselbe Objekt bezeichnen, genauso wie verschiedene Variablen denselben Wert annehmen dürfen. Wenn wir zum Beispiel sagen „Seien x und y reelle Zahlen“, so erlaubt dies selbstverständlich, dass sie gleich sind. Genauso schliesst die Aussage der Geometrie „Seien P und Q Punkte einer Geraden g“ die Möglichkeit $P = Q$ mit ein. Auch in Aussagen der Form „Für je zwei Elemente von ... gilt“ werden die Elemente nicht automatisch als verschieden vorausgesetzt, zum Beispiel wenn man sagt: „Für je zwei Elemente a und b einer Gruppe G existiert ein eindeutiges Element x von G mit $ax = b$“. Was man als verschieden voraussetzen will, muss man also zu Beginn klar benennen, um Mehrdeutigkeiten und Missverständnisse zu vermeiden. So-

bald man eine Aussage in Formeln ausdrückt, wie in „$\forall g \in \mathcal{G}\ \exists P \in g\ \exists Q \in g\colon P \neq Q$“, wird meist klar, was gemeint ist.

Noch ein Beispiel dazu: Nach Definition hat jeder unitäre Ring R ein Nullelement 0_R und ein Einselement 1_R, und wenn man nicht aufpasst, nimmt man unbewusst an, dass diese verschieden seien. Dabei können sie durchaus gleich sein, nämlich für den Nullring. Wo man dies verbieten will, z.B. in den Axiomen für Körper, muss man es extra dazu sagen. Genauso neigt man generell dazu, sich jegliche mathematische Objekte als „nicht-trivial“ vorzustellen, also Mengen und Räume als nichtleer, Gruppen und Vektorräume und Ringe als aus mehr als einem Element bestehend, und so weiter.

Eine gute Vorkehrung gegen Irrtümer besteht daher darin, alle Aussagen anhand von Extrembeispielen zu testen. Zum Beispiel wende man eine Aussage über Mengen auf die leere Menge an, eine Aussage über Vektorräume auf den Nullraum, eine Aussage über Zahlen auf die Zahl 0, eine Aussage über Gruppen auf die Gruppe mit einem Element, usw., oder man betrachte eben den Fall, dass gegebene Objekte trotz verschiedener Bezeichnungen gleich sind.

Ein ähnliches Problem entsteht beim unbedachten Verwenden der Alternative „entweder ... oder“. Ausserhalb der Mathematik benutzt man diese oft, ohne sich zu überlegen, ob man das gleichzeitige Zutreffen beider Möglichkeiten wirklich ausschliessen möchte oder nicht. Innerhalb der Mathematik, bzw. der Logik, bedeutet „entweder ... oder“ aber das ausschliessende „oder“, wohingegen das einschliessende logische „oder“ in Wirklichkeit viel häufiger richtig ist. Man kann dieses Problem vermeiden, indem man sich bewusst dazu erzieht, das Wort „entweder“ gar nicht erst zu benutzen, es also aus dem aktiven Wortschatz streicht, bis man seine Sprechgewohnheiten entsprechend umgestellt hat.

Ein weiterer häufiger Denkfehler liegt darin, ein Objekt durch gewisse Eigenschaften zu charakterisieren und dann von „dem“ Objekt zu sprechen, ohne geklärt zu haben, ob es denn existiert und durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Vor allem die Eindeutigkeit wird leicht vergessen. Wenn wir zum Beispiel einen Vektorraum haben, so dürfen wir zwar eine Basis wählen und danach von „der“ (gewählten) Basis sprechen. Wir dürfen aber nicht einfach so von „der“ Basis sprechen, weil es im allgemeinen verschiedene gibt. Die korrekte Definition der Dimension eines Vektorraums lautet daher „die Kardinalität *einer* Basis“, und damit das wohldefiniert ist, muss man beweisen, dass eine Basis existiert und dass jede Basis dieselbe Kardinalität besitzt. Danach ist es in Ordnung, von „der“ Dimension des Vektorraums zu sprechen. Genauso sprechen wir erst dann von „dem“ Einselement einer Gruppe oder eines Körpers, wenn wir bewiesen haben, dass dieses eindeutig bestimmt ist; bis dahin müssen wir uns mit der Formulierung „ein Einselement“ begnügen.

Nach einer verbreiteten Konvention meint man mit „der“ Quadratwurzel einer nichtnegativen reellen Zahl x stets die eindeutige nichtnegative reelle Zahl y mit der Eigenschaft $y^2 = x$. Die Bezeichnung $\sqrt{x}$ für diese ist durch ihre Eindeutigkeit gerechtfertigt. Für Quadratwurzeln von komplexen Zahlen existiert dagegen keine vernünftige Vorzeichenregel; darum darf man dort stets nur von „einer“ Quadratwurzel sprechen und muss zuerst eine geeignete wählen, bevor man mit dieser weiter arbeiten kann.

Noch ein Beispiel aus der ebenen Geometrie: Ein *Kreis* K ist definiert als die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt O einen gegebenen positiven Abstand r haben. Den Punkt O nennt man dann *Mittelpunkt* und die Zahl r *Radius von* K. Diese Definition alleine schliesst aber nicht aus, dass eine andere Wahl von O und r dieselbe Punktmenge K liefern kann. Bevor man geklärt hat, ob dies in einer gegebenen Geometrie der Fall ist, darf man daher nicht von „dem“ Mittelpunkt und „dem“ Radius eines Kreises sprechen, ohne solche extra gewählt zu haben.

Generell sollte man also stets auf eine saubere Formulierung achten und aufpassen, wo man den bestimmten Artikel und wo den unbestimmten Artikel verwendet.

Missverständnisse können entstehen, wo einander widersprechende Konventionen gebräuchlich sind. Allgemein akzeptiert ist, dass Zahlen $x > 0$ positiv und Zahlen $x \geqslant 0$ nichtnegativ heissen, also insbesondere, dass die Zahl 0 weder positiv noch negativ ist. Die Mehrheit der Mathematiker folgt der Konvention, dass die Bezeichnung $X \subset Y$ für eine Inklusion von Mengen auch die Gleichheit erlaubt, und schreiben $X \subsetneq Y$ oder $X \subsetneqq Y$ für eine echte Inklusion. Andere schreiben für ersteres sicherheitshalber $X \subseteq Y$; was sie dann mit $X \subset Y$ meinen, ist nicht immer klar. Völlig durcheinander geht der Gebrauch des Symbols $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen: Für manche schliesst es die Zahl 0 mit ein, für andere nicht. Ich empfehle daher, das Symbol $\mathbb{N}$ gar nicht erst zu verwenden, sondern stattdessen klarer $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ bzw. $\mathbb{Z}^{>0}$ zu schreiben. Meine persönliche Meinung ist, dass die natürlichen Zahlen die möglichen Kardinalitäten endlicher Mengen sind und daher mit der Kardinalität der leeren Menge, also mit 0 beginnen. In der mathematischen Logik ist das allgemein akzeptiert.

Viele Irrtümer beginnen mit Worten der Art „Offensichtlich gilt ...“ oder verstecken sich in Formulierungen wie „Das ist trivial“ oder „Man zeigt leicht, dass ...“. Viel zu oft übertünchen diese lediglich die Tatsache, dass es einem zu mühsam war, sich die Details zu überlegen. In Wirklichkeit weiss man also genau, dass man eine erhebliche Lücke lässt, will sich selbst und anderen aber aus Bequemlichkeit das Gegenteil weismachen und begeht dabei leicht ernsthafte Fehler.

Natürlich muss man andere nicht mit langweiligen Rechnungen quälen. Sich selbst aber schon, wo man nicht die gleiche Rechnung schon hundertmal gemacht hat. Oft stellt man dabei fest, dass die Sache viel weniger trivial war, als man gedacht hatte. Man sollte sich also wirklich stets alle Details überlegen und zumindest für sich dokumentieren. Wenn man dann in der Kommunikation Details weglässt, kann man dem Adressaten genau sagen, worauf es dabei ankommt, und muss sich nicht mit Wischiwaschi-Formulierungen herausreden. Dann kann man zum Beispiel sagen „Durch direkte Anwendung von ... und ... folgt ...”. Das ist viel hilfreicher, und kaum länger, als „Jetzt zeigt man leicht ...“.

Ausserdem hängt es stets vom Zusammenhang ab, was man als leicht und offensichtlich oder als schwer und undurchsichtig empfindet. Mathematik hat die faszinierende Eigenschaft, dass einem etwas für eine Weile als völlig unverständlich erscheinen kann, bis sich die Ideen im Kopf so angeordnet haben, dass es einem danach als die natürlichste Sache der Welt vorkommt. Dann vergisst man nur zu leicht, wie sehr man um die neue Erkenntnis ringen musste. Vor dem Moment des Aha-Erlebnisses war die Sache dann eben weder trivial noch offensichtlich.

Diesen Denkprozess beim Adressaten sollte man bei jeder mathematischen Mitteilung berücksichtigen, schon aus Respekt vor dem anderen Menschen. Ohnehin hört dieser bei Worten wie „trivial“ und „offensichtlich“ schnell den unterschwelligen Vorwurf „Du bist dumm, wenn du das nicht verstehst“. Solche Worte werden schnell zu Waffen, die den Adressaten beleidigen und zurückstossen, auch wenn sie nicht so gemeint sind. Man sollte sie daher nur sehr zurückhaltend verwenden. Zum Respekt vor anderen gehört auch, klar zu kommunizieren und Mehrdeutigkeiten zu vermeiden und sie nicht raten zu lassen, was man denn eigentlich meint.

1.7 Die axiomatische Methode

Wie oben erklärt, besteht das Ziel der Mathematik darin, Sätze über die untersuchten mathematischen Objekte zu beweisen, also wahre Aussagen darüber zu etablieren. Dies tun wir, indem wir neue Aussagen mittels logischer Schlussregeln aus anderen, bereits davor als wahr erkannten Aussagen herleiten. Vielleicht haben wir jene auf noch frühere wahre Aussagen zurückgeführt, und so weiter, aber wir können diesen Regress nicht unendlich oft durchführen. Wir müssen uns daher auf geeignete Anfangsaussagen einigen, welche wir als wahr postulieren und nicht länger zu beweisen versuchen. Diese Anfangsaussagen nennt man Axiome.

Die sogenannte *axiomatische Methode* besteht darin, geeignete Axiomensysteme herauszusuchen und alle weiteren Sätze nur aus diesen herzuleiten. Da die Axiome innerhalb des formalen Systems nicht zu beweisen sind, müssen wir uns damit begnügen, solche Axiome zu wählen, die uns aus unserer menschlichen Anschauung heraus als besonders plausibel erscheinen. Dabei können wir meist nicht beweisen, dass wir nicht einem fundamentalen Irrtum erliegen. Zum Beispiel kann man nicht beweisen, dass die üblichen Axiome der natürlichen Zahlen oder der Mengenlehre widerspruchsfrei sind. Wir können nur versuchen, Probleme zu minimieren, indem wir möglichst wenige und möglichst einfache Axiome wählen.

Oft hat man bei der Wahl der Axiome eine gewisse Freiheit, und verschiedene Axiomensysteme für dieselben Objekte stellen sich als äquivalent heraus. Die etablierten Axiomensysteme für die gängigsten mathematischen Begriffe haben sich jedoch als günstig bewährt.

Axiome für die gesamte Mathematik umfassen solche für die Prädikatenlogik und die Mengenlehre. Diejenigen, welche man heute verwendet, gehen auf das erste Drittel des 20. Jahrhunderts zurück und werden von fast allen Mathematikern akzeptiert. Dazu gibt es Axiome für die natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen, welche man aber auf die üblichen Axiome der Mengenlehre zurückführen kann, das heisst: Im Rahmen der Mengenlehre kann man beweisen, dass die Axiomensysteme für die natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen erfüllbar sind.

Axiomensysteme benutzt man ausserdem, um spezielle mathematische Objekte wie Körper, Gruppen, Ringe, Vektorräume, topologische Räume, usw. zu definieren. Solche Objekte bestehen in der Regel aus einer oder mehreren Mengen sowie Funktionen und Relationen auf diesen, welche gemeinsam gewisse Eigenschaften, eben Axiome,

erfüllen müssen. Das Studium dieser Objekte besteht dann einerseits darin, Folgerungen aus diesen Axiomen herzuleiten, und andererseits darin, die Beziehungen zwischen verschiedenen Objekten, welche jedes für sich die Axiome erfüllen, zu klären.

1.8 Euklids „Elemente“

Die axiomatische Methode wurde im antiken Griechenland entwickelt und vor rund einem Jahrhundert endgültig klar formuliert und zur Grundlage der Mathematik erklärt. Dieser Methode folgt das Werk „Elemente“ aus dem 4. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung, in dem Euklid das im Mittelmeerraum verfügbare geometrische Wissen seiner Zeit zusammengefasst hat.

Er beginnt mit einigen Erläuterungen wie „*Punkt* ist, was ohne Teil ist“ und „*Linie* ist Länge ohne Breite“. Er benennt also zuerst die Begriffe, mit denen er im folgenden arbeiten will. Seine Definitionen haben allerdings keinen formalen mathematischen Sinn, weil nicht bereits vorher erklärt worden ist, was „Teil“ und „Länge“ und „Breite“ bedeuten. Sie sind eher wie Definitionen aus einem Wörterbuch, in dem die Bedeutung jedes Worts mittels anderer Wörter erklärt wird und das nur sinnvoll benutzen kann, wer bereits einen nicht näher bestimmten Basiswortschatz besitzt. Der einzige sinnvolle mathematische Inhalt der zitierten Stellen liegt in der Ankündigung „Wir werden im folgenden von Punkten und Linien sprechen, deren Eigenschaften wir noch näher angeben werden“. Oder in die heutige Sprache der Mengen übersetzt: „Gegeben sei eine Menge $\mathcal{E}$, deren Elemente wir Punkte nennen wollen“ und „Gegeben sei eine Menge $\mathcal{L}$, deren Elemente Teilmengen von $\mathcal{E}$ sind, welche wir Linien nennen“.

Beim Umgang mit Euklids Bezeichnungen ist aber Vorsicht geboten. Zum Beispiel meint er mit „Gleichheit“ von Strecken oder Winkeln in Wirklichkeit Kongruenz. Und mit Linien meint er Kurven und muss es folglich extra dazu sagen, wenn er von einer geraden Linie sprechen will. Er lässt auch unklar, welche Gebilde von Punkten er genau als Linien ansehen will, und kann nur Beispiele wie z.B. Kreise angeben, aber keine vollständige mathematische Definition. Da er von Winkeln spricht, wo sich zwei Linien schneiden, schwebt ihm sicher etwas der Art vor, was man heute regulär eingebettete differenzierbare Kurven nennt; insbesondere dürfen Linien keine Ecken oder Selbstüberschneidungen haben. Sie dürfen durch Anfangs- und Endpunkte begrenzt sein oder sich bis ins Unendliche erstrecken.

Einen Kreis definiert er nach heutigen Massstäben vollständig präzise als die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt, genannt Mittelpunkt, einen gegebenen positiven Abstand, genannt Radius, haben. Er ist sich dessen bewusst, dass diese Definition alleine keinesfalls impliziert, dass der Mittelpunkt oder der Radius durch den Kreis eindeutig bestimmt sind, sondern dass dies erst später aus anderen Aussagen hergeleitet werden muss und kann.

Sodann gibt Euklid einige Postulate und Axiome an, welche beide als Axiome im heutigen Sinn gemeint sind. Zum Beispiel besagt sein Axiom „Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich“, dass die Kongruenzrelation transitiv ist. Moderner als das geht es nicht. Andere seiner Axiome bedürfen aus heutiger Perspektive jedoch

Präzisierungen und Ergänzungen. Sein Axiom „Das Ganze ist grösser als der Teil“ ist eher eine Definition des Begriffs „grösser“ denn ein Axiom, weil dieser Begriff vorher noch nicht eingeführt worden war.

Der Hauptteil von Euklids Werk enthält Propositionen, also Lehrsätze, die er aus seinen Postulaten und Axiomen herleitet. Seine Behandlung ist aus heutiger Sicht zwar nicht ganz vollständig, aber insgesamt ein eindrücklicher Beweis für die Stärke der axiomatischen Methode.