Serie 6

1. **a)** Berechnen Sie die Umkehrfunktion des Cosinus Hyperbolicus

$$\cosh\colon [0,\infty] \to [1,\infty)\colon x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

b) Bestimmen Sie die Ableitung von arcosh direkt und mit der Kettenregel.

2. Newton-Verfahren:

a) Wir wollen mit Hilfe des Newton-Verfahren den numerischen Wert für $\sqrt{2}$ als Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ bestimmen. Finden Sie die Rekursionsformel für x_n und berechnen Sie die ersten drei Werte mit dem Startwert $x_0 = 1$.

b) Stellen Sie das Newton-Verfahren für $f(x) = x^3 - 2x + 2$ und Startwert $x_0 = 0$ auf und berechnen Sie die ersten drei Iterationsschritte. Was geht hier schief?

c) Das Newtonverfahren setzt voraus, dass die gegebene Funktion f differenzierbar ist und wir die Ableitung f' kennen. Wir wollen nun analog dazu das Sekantenverfahren herleiten, das nur den Funktionswert $f(x)$ benötigt. Für zwei gegebene Werte x_n, x_{n-1} erhalten wir den neuen Wert x_{n+1} indem wir die Sekante durch $(x_n, f(x_n))$ und $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ mit der x-Achse schneiden.

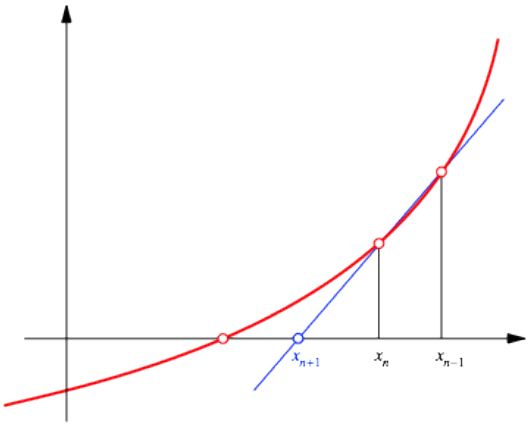


Abbildung 1: Sekantenverfahren

Bitte wenden!

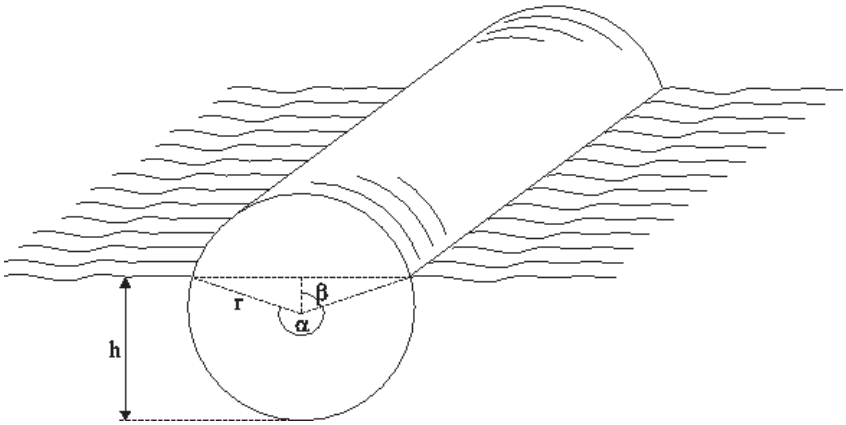
i. Bestimmen Sie die Parametergleichung für die Sekante.

ii. Leiten Sie die Rekursionsformel für x_{n+1} her.

iii. Berechnen Sie die ersten drei Näherungen von $\sqrt{2}$ mit den beiden Startwerten $x_0 = 0, x_1 = 1$.

3. Ein runder Holzbalken schwimmt im Wasser (Dichte $\varrho_0 = 1\,g/cm^3$). Der Balken hat die Dichte ϱ_1, die Länge l und den Radius r.

Mit dem Gesetz von Archimedes (das Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewicht des durch ihn verdrängten Wassers) können wir eine Gleichung zur Bestimmung der Eintauchtiefe h bzw. des Öffnungswinkels α (siehe Skizze) aufstellen:



$$r^2\pi \cdot l\varrho_1 = \left[\frac{r^2}{2}\alpha + r^2 \sin\Big(\underbrace{\pi - \frac{\alpha}{2}}_{=\beta}\Big) \cdot \cos\Big(\underbrace{\pi - \frac{\alpha}{2}}_{=\beta}\Big)\right] \cdot l\varrho_0 \tag{1}$$

Multiplikation mit $\dfrac{2}{r^2\varrho_0 l}$ und Definition des Dichtequotienten $\varrho = \dfrac{\varrho_1}{\varrho_0} \in (0,1)$ führen zu

$$\alpha - \sin\alpha = 2\pi\varrho. \tag{2}$$

Diese Gleichung lässt sich nicht analytisch, sondern nur näherungsweise, also numerisch, lösen. Die dürfen dazu den Taschenrechner verwenden.

a) Überlegen Sie sich, weshalb die Gleichung (1) stimmt.

b) Leiten Sie Gleichung (2) wie beschrieben aus Gleichung (1) her.

c) Bringen Sie die Gleichung (2) auf die Form eines Nullstellenproblems $f(\alpha) = 0$.

d) Skizzieren Sie die Funktion $f(\alpha)$ für $\varrho = 0.8$ (Eichenholz). Tragen Sie zusätzlich die Tangente an den Graphen im Punkt $(\alpha_0, f(\alpha_0))$ ein, wobei $\alpha_0 = 5$ sein soll.

Siehe nächstes Blatt!

e) Wie lautet die Tangentengleichung? Berechnen Sie die Stelle α_1, an der die Tangente die α-Achse schneidet. (Dies entspricht dem ersten Schritt eines Newtonverfahrens zur Nullstellensuche.)

f) Führen Sie fünf weitere Iterationsschritte gemäss Newtonverfahren aus.

g) Wie gross ist die Eintauchtiefe des Balkens näherungsweise?

4. Repetitions-Aufgabe. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x \sin x$	**b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$	**c)** $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
d) $f(x) = e^{-x}$	**e)** $f(x) = (\tan x)^2$	**f)** $f(x) = \sqrt{\ln x}$
g) $f(x) = \tan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	**h)** $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$	

5. Online-Abgabe

1. Zwischenprüfung Winter 2014. Bestimmen Sie die Inverse von $f(x) = \frac{1}{1+ae^x}$ mit $a > 0$ und deren maximalen Definitionsbereich.

(a) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, \infty)$

(b) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, 1)$

(d) $f^{-1}(x) = 1 + ae^x$, $x \in \mathbb{R}$

Bitte wenden!

2. Zwischenprüfung Winter 2014. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen ist ***nicht*** hinreichend um zu garantieren, dass f eine Inverse hat?

(a) $f(x) = ax^3, a \neq 0.$

(b) f ist streng monoton wachsend und surjektiv.

(c) f ist bijektiv.

(d) f ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

3. Welche der folgenden Formeln ist **falsch**?

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

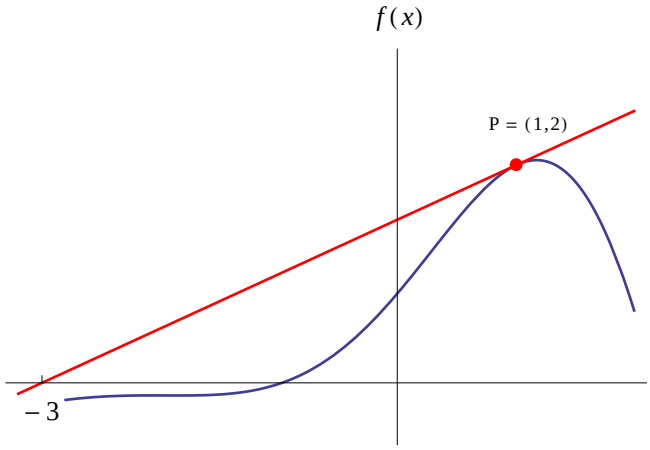
(b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

(c) $2\cosh^2 x = 1 + \cosh 2x$

(d) $2\sinh^2 x = 1 + \sinh 2x$

Siehe nächstes Blatt!

4. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

5. Die erste Ableitung von $f(x) = \left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^7$ ist gegeben durch

(a) $7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6 \frac{6x^{11}-8x^9-3x^4+33x^2-12}{(x^3-x)^2}$

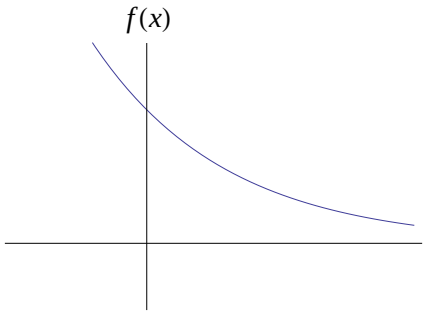
(b) $7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6$

(c) $\left(\frac{9x^8+6x}{3x^2-1}\right)^7$

(d) $\left(\frac{6x^{11}-8x^9-3x^4+33x^2-12}{(x^3-x)^2}\right)^7$

Bitte wenden!

6. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Welche der Aussagen gelten?



(a) Die Funktion f ist positiv.

(b) Die Funktion f ist negativ.

(c) Die Ableitung f' ist positiv.

(d) Die Ableitung f' ist negativ.

(e) Die zweite Ableitung f'' ist nichtnegativ.

(f) Die zweite Ableitung f'' ist nichtpositiv.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 30. Oktober 2014 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.