D-INFK
Roman Glebov
Marc Pollefeys

Serie 4

1. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{I}$ die $n \times n$-Einheitsmatrix und $\boldsymbol{E}$ die $n \times n$-Einsmatrix, d.h. $\boldsymbol{E}_{ij} = 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

a) Bestimmen Sie $\boldsymbol{E}^2$.

b) Für reele Zahlen a, b, c, d setzen Sie $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{C} = c\boldsymbol{I} + d\boldsymbol{E}$. Bestimmen Sie reelle u, v, so dass $\boldsymbol{AC} = u\boldsymbol{I} + v\boldsymbol{E}$.

c) Sei $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{E}$ wie in b). Bestimmen Sie x und y, so dass $\boldsymbol{A}^{-1} = x\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{E}$. Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen?

2. Matrix Interpretation der LU-Zerlegung

Für $1 \leq k \leq n-1$ im Schritt k der Gauß-Elimination (Algorithmus 1.1 im Skript) erhalten Sie eine $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}_k = \left[a_{i,j}^{(k)}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$, die in den Spalten $1, \ldots, k$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Inbesondere, für $k = n - 1$ erhalten Sie eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}_{n-1}$.

Sei

$$\boldsymbol{\tau}_k = \begin{array}{c} \text{Index} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{e}_k = \begin{array}{c} \text{Index} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die $n \times n$-Matrizen $\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\tau}_k \boldsymbol{e}_k^\top$ und $\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{M}_k^{-1}$. Zeigen Sie:

a) $\boldsymbol{M}_k \boldsymbol{A}_{k-1} = \boldsymbol{A}_k$ für $1 \leq k \leq n-1$,

b) $\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}_k \boldsymbol{e}_k^\top$ für $1 \leq k \leq n-1$,

c) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{L}_{n-1}$ ist eine untere Dreiecksmatrix,

d) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$.

Bitte wenden!

3. Sei $\boldsymbol{A}$ die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LU-Zerlegung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ der Matrix $\boldsymbol{A}$.

b) Lösen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$ das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}x = b$, wobei

$$b = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Sei $V := \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, n^\top x = 0\}$, wobei $n := (1, -2, 1)^\top$.

a) Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$) ist.

b) Finden Sie Vektoren $y, z \in \mathbb{R}^3$, so dass die Menge $\{y, z\}$ ein Erzeugendensystem für V ist.

c) Skizzieren Sie V (auf Papier).

5. MATLAB-Aufgabe **LU-Zerlegung**

a) In der Übungsstunde haben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [L,U] = lu(A)
```

zur Berechnung der LU-Zerlegung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ für $n \times n$-Matrizen $\boldsymbol{A}$ kennengelernt. Implementieren Sie diese Funktion.

b) Testen Sie Ihre Implementierung mit der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Matrizen $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{U}$ aus.

6. Lösen Sie die Online-Multiple-Choice-Aufgaben.

Siehe nächstes Blatt!

1. Seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ reelle $n \times n$-Matrizen. Welche Aussagen sind richtig?

(a) Wenn $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{C}$ invertierbar ist, dann sind auch $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ invertierbar.

(b) Wenn $\boldsymbol{A}$ Rang 1 hat, dann hat auch $\boldsymbol{AB}$ Rang 1.

(c) Es gibt nur eine $n \times n$-Matrix mit Rang 0.

(d) Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\boldsymbol{A}^k = 0$, dann ist $\boldsymbol{A}$ nicht invertierbar.

2. Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume?

(a) $\{p \in \mathcal{P}^1 : p(-1) = p(1)\} \subseteq \mathcal{P}^1$

(b) $\{p \in \mathcal{P}^1 : p(1) = 1\} \subseteq \mathcal{P}^1$

(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 5\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(e) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 = 4x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(f) $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 = 4x_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Matrizen besitzen eine Cholesky-Zerlegung?

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$.

(d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$.

Für MATLAB-Aufgaben: Bitte stellen Sie sicher, dass Ihre Programme ausführbar sind und korrekt laufen. Reichen Sie Ihre Lösungen unter `http://www.math.ethz.ch/~grsam/submit/?VL=05` ein **und** geben Sie zusätzlich einen Ausdruck des generierten .pdf zusammen mit den Lösungen der anderen Aufgaben ab.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, den 16.10.14, 12:00 h** ab.

`http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/linalg_INFK`