

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Name	
Vorname	
Leginummer	

1	2	3	4	5	Punkte	Note

Schauen Sie das Prüfungsblatt (im Kuvert) erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt! Und gehen Sie vor Prüfungsbeginn folgende Punkte in Ruhe durch:

- Tragen Sie Name, Vorname und Leginummer oben ein.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex. Legen Sie sich am besten nur erlaubtes Schreibzeug zurecht.

Beachten Sie während der Prüfung:

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe). Nicht begründete Lösungen ergeben keine Punkte!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle fünf Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Abgabeprozedere:

- Sobald die Prüfungszeit abgelaufen ist oder wenn Sie vorzeitig abgeben möchten, verstauen Sie bitte dieses Deckblatt, das Aufgabenblatt und alle weiteren Blätter, die Sie abgeben wollen, im Kuvert. Das Kuvert bitte nicht zukleben und auch nicht beschriften.

Viel Glück!

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
\times	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Ein Gleichungssystem $Ax = Ab$ für x (A und b gegeben) hat immer genau eine Lösung ($x = b$).		
b) Einer Matrix die Summe ihrer Einträge zuzuordnen, ist eine lineare Abbildung.		
c) $A \mapsto A^\top$ ist eine lineare Abbildung und die symmetrischen Matrizen bilden einen Eigenraum davon.		
d) Im \mathbb{R}^3 gibt es 4 Vektoren, so dass beliebige 3 davon (es gibt 4 solche Grüppchen) linear unabhängig sind.		
e) Sei $e_1 = (1, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$. Gilt für eine 3×3 -Matrix, dass Ae_1, A^2e_1, A^3e_1 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden, dann ist A invertierbar.		
f) Die Polynome $p_1(x) = 1 + (1 + 7x) + (1 - 49x)^2$, $p_2(x) = (1 + 7x) + (1 - 49x)^2$, $p_3(x) = (1 - 49x)^2$ sind linear abhängig.		
g) Es gibt eine Basis $\{u, v\}$ des Vektorraums \mathbb{R}^2 mit $\ u\ = \ v\ = 1$ und $\langle u, v \rangle = 1$.		
h) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von \mathbb{R}^4 gibt es eine Matrix A mit $\text{im}(A) = U = \ker(A)$.		
i) Ordnet man zwei 2×2 -Matrizen A, B auf folgende Weise in einer 4×4 -Matrix C an: $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $\text{Rang}(C) = \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B)$.		
j) Multipliziert man eine $m \times n$ -Matrix mit einer $n \times p$ -Matrix mit der üblichen Formel, so benötigt man – wenn man keine Vereinfachungen vornimmt – genau mnp viele Multiplikationen und $m(n - 1)p$ viele Additionen.		

A

Bitte wenden!

2. [10 Punkte] Von der 3×3 -Matrix A seien folgende Eigenvektoren (EV) und Eigenwerte (EW) bekannt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 0, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } -3, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 3.$$

- a) [1 Punkte] Ist A diagonalisierbar?
- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie A .
- c) [2 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = Ay$.
- d) [3 Punkte] Für welche Anfangswerte $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ gilt $y(t) \rightarrow (1, 2, 3)^\top$ wenn $t \rightarrow \infty$?
3. [10 Punkte] Sei \mathcal{P}_4 der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 4 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Die folgende lineare Abbildung ist gegeben:

$$L: \mathcal{P}_4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_0^1 p(x) dx.$$

- a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass L eine lineare Abbildung ist. Welche Dimension hat der Kern?
- b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis \mathcal{B} .
- c) [3 Punkte] Sei nun auf \mathcal{P}_4 folgendes Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum $\text{span}\{1, 3x^4\}$.

4. [10 Punkte] Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [5 Punkte] Diagonalisieren Sie A ; also geben Sie eine diagonale Matrix D und eine orthogonale Matrix T an, so dass $A = TDT^\top$.
- b) [2 Punkte] Die Matrix B hat dieselben Eigenvektoren wie A ; diagonalisieren Sie auch B .
- c) [3 Punkte] Berechnen Sie das Produkt $ABAABBAAABBB$.

5. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = -8x_1^2 + 12x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^2, \quad \text{wobei } x = (x_1, x_2, x_3)^\top.$$

- a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.
- b) [6 Punkte] Eine Quadrik Q ist gegeben durch $q(x) = 1$. Bringen Sie die Quadrik durch eine Hauptachsentransformation $y = Tx$ auf Normalform (und geben Sie dabei auch T explizit an).
- c) [3 Punkte] Bestimmen Sie, welche der Hauptachsen die Menge $\{x \mid q(x) = 1\}$ nicht schneidet (und begründen Sie).