

ETHZ, D-MAVT  
Frühling 2006 Basisprüfung  
**Lineare Algebra**  
K. Nipp

**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind nicht erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3 - 6a & -6 + 5a \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte des Parameters  $a$  besitzt die Matrix  $A$  eine Inverse?

2. Gegeben sind die vier Punkte  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , wobei

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}.$$

Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ , so dass die Summe der Fehlerquadrate in  $y$ -Richtung

$$\sum_{i=1}^4 [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird.

3. Bestimmen Sie im  $\mathbb{R}^3$  die Matrix der Spiegelung an der  $(x, y)$ -Ebene

- a) bezüglich der Standardbasis;  
b) bezüglich der Basis  $e_1 = (1, 1, 0)^T$ ,  $e_2 = (-1, 1, 0)^T$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)^T$  von  $\mathbb{R}^3$ .  
(Begründung!)

4. a) Diagonalisieren Sie – falls möglich – die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Kann man in den Fällen, in denen die Matrizen diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen  $T$  orthogonal wählen? Wenn ja, geben Sie so ein  $T$  an.

5. Für welche Parameterwerte  $t$  lässt sich der Vektor

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -27 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

darstellen? Bestimmen Sie die Koeffizienten der Linearkombination.

6. Gegeben Sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $\dot{y} = Ay$  wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen  $y_1(0) = 3, y_2(0) = 5, y_3(0) = 2$ .
- b) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen  $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ , für welche die zugehörigen Lösungen  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  gegen Null streben für  $t \rightarrow -\infty$ .