

ETHZ, D-MAVT
Basisprüfung Lineare Algebra
Winter 2010
Prof. Ö. Imamoglu

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie eine Basis für Kern A .
- b) Bestimmen Sie eine Basis für Bild A .
- c) Konstruieren Sie aus den Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine orthonormale Basis von \mathbb{R}^3 (bzgl. des Standardskalarproduktes), indem Sie das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren verwenden.

2. [8 Punkte] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Sei $\mathcal{B} = \{b^{(1)} := 1, b^{(2)} := x, b^{(3)} := 3x^2 - 1\}$

- a) Zeigen Sie, dass \mathcal{B} eine Basis von \mathcal{P}_2 ist.
- b) Sei $p(x) := 11x^2 - 2x + 1$. Schreiben Sie $p(x)$ in den Koordinaten der Basis \mathcal{B} .
- c) Zeigen Sie, dass die Vektoren aus \mathcal{B} orthogonal sind im Bezug zu dem Skalarprodukt:

$$(f, g) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

Bitte wenden!

3. [10 Punkte] Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A .
- b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A .
- c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^5 .

4. [10 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit der Transformationsmethode.
- b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \rightarrow +\infty$.
- d) Die Matrix A sei in MATLAB schon als A gegeben. Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements, um die Determinante von AA^T zu berechnen.

5. [8 Punkte] Sei \mathcal{P}_3 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{P}_3 &\rightarrow \mathcal{P}_3 \\ p(x) &\mapsto xp'(x) - p(x) \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, dass \mathcal{F} eine lineare Abbildung ist.
- b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von \mathcal{F} bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$.
- c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix B von \mathcal{F} bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 := \{1 - x, x, x^2 + x, x^3 - 1\}$.

Viel Erfolg!