Beispiellösung für Serie 3

Aufgabe 3.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

3.1a) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A orthogonal (d. h. $AA^T = A^T A = I_n$) ist für beliebige rechte Seiten b eindeutig lösbar.

√ (i) richtig (ii) falsch

Lösung: Da A orthogonal ist, ist A insbesondere regulär: $A^{-1} = A^T$. Für reguläre Matrizen A ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für beliebige rechte Seiten lösbar, siehe Satz 2.8 auf S. 31 im Buch.

3.1b) Die LR-Zerlegung (ohne Zeilenvertauschung) der Matrix $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 6 \\ 10 & 8 & 5 & 14 \\ 15 & 14 & 17 & 36 \end{bmatrix}$ liefert $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(i) richtig √ (ii) falsch

Lösung: Die erste Zeile der R Matrix müsste der ersten Zeile von A entsprechen, falls $LR = A$. Dies ist nicht der Fall.

3.1c) Die Inverse einer symmetrischen Matrix, falls sie existiert, ist symmetrisch.

√ (i) richtig (ii) falsch

Lösung: Sei C die symmetrisch Matrix ($C = C^T$) mit existierender Inverser. Es gilt:

$$C(C^{-1})^T \overset{C \text{ symm.}}{=} C^T(C^{-1})^T \overset{\text{Satz 2.4 iii)}}{=} (C^{-1}C)^T = I^T = I\,.$$

Daraus folgt, dass $(C^{-1})^T$ die Inverse von C ist. Die Inverse von C ist aber eindeutig, somit gilt $(C^{-1})^T = C^{-1}$, womit die Inverse symmetrisch ist.

3.1d) Eine $n \times n$-Matrix A ist nicht invertierbar genau dann, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ nicht für jedes b lösbar ist.

√ (i) richtig (ii) falsch

Lösung: Kontraposition von Satz 2.8 i) und ii) (d. h. ist Teil i) von Satz 2.8 falsch genau dann, wenn Teil ii) falsch ist).

3.1e) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für jedes b lösbar. Dann hat das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ mindestens eine nicht-triviale Lösung.

√ (i) richtig (ii) falsch

Lösung: Kontraposition von Satz 2.8 ii) und iii) (d. h. wenn Teil ii) von Satz 2.8 falsch ist, ist Teil iii) auch falsch).

Aufgabe 3.2

3.2a) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & + & 14x_3 & = & -2 \end{array}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung (mit Zeilenvertauschung).

Lösung: Bestimmung der Matrizen L, R und P, so dass $LR = PA$:

$$\left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Daraus lassen sich die Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

und

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ablesen, für die $LR = PA$ gilt. Wir erhalten für die Lösung c von $Lc = Pb$

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich die Lösung

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.2b) Lösen Sie das Gleichungssystem in Teilaufgabe 3.2a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Lösung: Das lineare Gleichungssystem kann mit Hilfe von MATLAB wie folgt gelöst werden:

```
A   = [ -2 1 4; 2 -1 -1;-6 4 14];
b   = [-1;4;-2];
x   = A\b;
```

Aufgabe 3.3

3.3a) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(A\,B)^T$, $A^T\,B^T$ und $B^T\,A^T$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
(A\,B)^T &= \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \begin{bmatrix} 27 & -18 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -18 & 9 \end{bmatrix}, \\
A^T\,B^T &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -5 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 15 \\ 29 & -1 & -11 \\ -28 & 15 & 22 \end{bmatrix}, \\
B^T\,A^T &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -18 & 9 \end{bmatrix} = (A\,B)^T.
\end{aligned}$$

3.3b) Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen C gilt, $C + C^T$ ist symmetrisch.

Lösung: Sei C eine $n \times n$-Matrix:

$$(C + C^T)^T \overset{\text{Satz 2.4 ii)}}{=} C^T + (C^T)^T \overset{\text{Satz 2.4 i)}}{=} C^T + C \overset{\text{Satz 2.1 i) (Kommut.)}}{=} C + C^T,$$

also ist $C + C^T$ symmetrisch (Definition Seite 27).

3.3c) Zeigen Sie, dass für *beliebige* Matrizen M gilt, $M^T M$ und $M M^T$ sind symmetrisch.

Lösung: Sei M nun eine $m \times n$-Matrix. Es folgt wegen $(A\,B)^T = B^T\,A^T$ (Satz 2.4 iii) vom Buch), dass

$$\begin{aligned}
&(M\,M^T)^T = (M^T)^T\,M^T = M\,M^T, \text{ und analog:} \\
&(M^T\,M)^T = M^T\,(M^T)^T = M^T\,M.
\end{aligned}$$

Also sind $M\,M^T$ und $M^T\,M$ symmetrisch.

3.3d) Beweisen Sie Ihre Antwort in Aufgabe 3.1c).

Lösung: Sei D eine symmetrische und invertierbare $n \times n$-Matrix. Aus Satz 2.7 v) vom Buch wissen wir dass

$$(D^{-1})^T \overset{\text{Satz 2.7}}{=} (D^T)^{-1} \overset{D\text{ symm.}}{=} D^{-1}\,.$$

Also ist D^{-1} symmetrisch.

Der Beweis dieser Aussage benötigt den Satz 2.7 nicht, siehe auch die Lösung der Aufgabe **3.1c)**.

Aufgabe 3.4

3.4a) Bestimmen Sie die 3×3-Matrizen, die beim Anwenden (von links) auf eine 3×3-Matrix A folgendes bewirken:

(i) E_{21}: subtrahiert dreimal die erste Zeile von der zweiten;

(ii) E_{31}: addiert zweimal die erste Zeile zur dritten;

(iii) E_{32}: subtrahiert einmal die zweite Zeile von der dritten;

(iv) P: vertauscht die zweite und die dritte Zeile.

Hinweis: Wenn man eine Zeile von/zu einer anderen subtrahieren/addieren will, dann soll man nur einen Eintrag der Einheitsmatrix abändern. Zum Beispiel addiert die folgende Matrix E_{12} zweimal die zweite Zeile von A zur ersten Zeile hinzu

$$E_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Wir haben

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4b) Seien A und R die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen M_1, M_2 und M_3, so dass

$$M_1 M_2 M_3 A = R,$$

wobei M_1, M_2 und M_3 Matrizen aus Teilaufgabe 3.4a) sind.

Hinweis: Die Matrizen M_1, M_2 und M_3 kann man mit Hilfe des Gaussalgorithmus finden. Tatsächlich kann man jede Operation des Gaussalgorithmus als Matrixprodukt mit einer der Matrizen aus 3.4a) schreiben.

Lösung: Die Matrizen sind $M_1 = E_{32}$, $M_2 = E_{31}$ und $M_3 = E_{21}$. Der Gaussalgorithmus angewandt auf die Matrix A ergibt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = R$$

Daher gilt:

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = R.$$

Bemerkung: Die Matrizen E_{31} und E_{21} können vertauscht werden, d. h. es gilt ebenso

$$E_{32}E_{21}E_{31}A = R.$$