Beispiellösung für Serie 7

Aufgabe 7.1

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \text{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $(x, y) := x^\top Dy$ für $x, y \in V$.

7.1a) Zeigen Sie, dass (x, y) in V ein Skalarprodukt definiert.

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass $D = \text{diag}(2, \frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ und $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ gilt:

$$(x, y) := x^\top Dy = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y_1 \\ \frac{1}{3}y_2 \end{bmatrix} = 2x_1y_1 + \frac{1}{3}x_2y_2.$$

Wir kontrollieren die Eigenschaften (S1)-(S3) von einem Skalarprodukt (siehe Buch, Seite 92).

(S1) i) Sei $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$:

$$(x, y + z) = x^\top D(y + z) = x^\top Dy + x^\top Dz = (x, y) + (x, z), \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}^2.$$

ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(x, \alpha y) = x^\top D(\alpha y) = \alpha x^\top Dy = \alpha(x, y).$$

(x, y) ist also linear im zweiten Faktor.

(S2) (x, y) ist symmetrisch, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(x, y) = x^\top Dy \overset{x^\top Dy \in \mathbb{R}}{=} (x^\top Dy)^\top = y^\top D^\top x = y^\top Dx = (y, x).$$

Bemerkung: Für D nicht symmetrisch ist $(x, y) = x^\top Dy$ nicht mehr symmetrisch, also kein Skalarprodukt.

(S3) (x, y) ist positiv definit, denn:

$$(x, x) = 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$$
$$(x, x) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, \text{ also } x = 0.$$

(x, y) ist also ein Skalarprodukt in V.

7.1b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

Lösung: Die durch (x, y) induzierte Norm ist

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^\top Dx} = \sqrt{2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2}.$$

7.1c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

Lösung: $\left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}3^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Aufgabe 7.2

7.2a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bez. des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

Lösung: <u>Berechnung von $b^{(1)}$</u>: $b^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Berechnung von $b^{(2)}$</u>:

$$\begin{aligned} c^{(2)} &= a^{(2)} - (a^{(2)},\, b^{(1)})\, b^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{=-3/\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ b^{(2)} = \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

<u>Berechnung von $b^{(3)}$</u>:

$$\begin{aligned} c^{(3)} &= a^{(3)} - (a^{(3)},\, b^{(1)})\, b^{(1)} - (a^{(3)},\, b^{(2)})\, b^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{=-1/\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right)}_{=1/\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ b^{(3)} = \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

7.2b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

bezüglich der in Teilaufgabe 7.2a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)},\ b^{(2)},\ b^{(3)}$, d. h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

Lösung: Wir lösen mittels des Gaussverfahrens die Gleichung

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}$$

nach den Koordinaten x_1, x_2, x_3 auf:

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 3 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 7 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 8 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 7 \end{array}\right]$$

$$\overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 8 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{3} & 15 \end{array}\right]$$

Durch Rückwärtseinsetzen bekommt man:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{15}{3}\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \\ x_2 &= \frac{8 - \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3}}{-2}\sqrt{6} = \sqrt{6} \\ x_1 &= \frac{5 + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}5\sqrt{3}}{-1}\sqrt{2} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Da $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ eine orthonormale Basis bilden, lassen sich die Koordinaten auch mit weniger Aufwand finden. Denn die Matrix $B = (b^{(1)},\ b^{(2)},\ b^{(3)})$ ist orthogonal und damit ist die Lösung des Gleichungssystems $x = B^T v$.

Durch Einsetzen der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation ergibt sich somit $x_i = {b^{(i)}}^T v$ für $i = 1, 2, 3$. Die i-te Koordinate entspricht also dem Skalarprodukt von v mit dem i-ten Basisvektor $b^{(i)}$.

In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} x_1 =& (v, b^{(1)}) = (5,\ 3,\ 7) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \\ x_2 =& (v, b^{(2)}) = (5,\ 3,\ 7) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = -\frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{14}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}, \\ x_3 =& (v, b^{(3)}) = (5,\ 3,\ 7) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

7.2c) Lösen Sie Teilaufgabe 7.2a) mit Hilfe der QR-Zerlegung in Matlab.
Hinweis: In MATLAB liefert der Befehl `[Q,R] = qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

Lösung:

Wir benutzen die QR-Zerlegung, um eine orthonormale Basis zu berechnen. Siehe dazu die Bemerkung auf Seite 115 im Buch.

Wir bilden aus den Spaltenvektoren $a^{(1)}, ..., a^{(3)}$ die Matrix $A = \left(a^{(1)}\ a^{(2)}\ a^{(3)}\right)$ und wenden darauf die QR-Zerlegung an.

Der folgende Matlab Code liefert das gewünschte Q:

```
A = [-1 1 1; 1 -2 0; 0 1 1];
[Q,R] = qr(A)
% Resultat fuer Q:
%   -0.7071   -0.4082    0.5774
%    0.7071   -0.4082    0.5774
%         0    0.8165    0.5774
```

Die Spalten der Matrix Q sind dann die gesuchten Vektoren.

Aufgabe 7.3

Sei $V = \mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad strikt kleiner als 3. Auf V ist durch $\big(p_1(x), p_2(x)\big) := \int\limits_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$ ein Skalarprodukt gegeben. Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V, indem Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $1, x, x^2$ anwenden.

Lösung: Gegeben ist das Skalarprodukt $\big(p_1(x), p_2(x)\big) := \int\limits_0^1 p_1(\xi)\, p_2(\xi)\, d\xi$. Eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$. Anwendung des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ergibt:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &= v_1 = 1 \\
u_1 &= \frac{\tilde{u}_1}{\|\tilde{u}_1\|} = \frac{\tilde{u}_1}{\sqrt{(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\, dx}} = \frac{1}{1} = 1 \\
\tilde{u}_2 &= v_2 - \big(u_1, v_2\big)\, u_1 = x - \left(\int\limits_0^1 x\, dx\right) 1 = x - \frac{1}{2} \\
u_2 &= \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{\tilde{u}_2}{\sqrt{(\tilde{u}_2, \tilde{u}_2)}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\, dx}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = 2\sqrt{3}\big(x - \frac{1}{2}\big) \\
\tilde{u}_3 &= v_3 - \big(u_1, v_3\big)\, u_1 - \big(u_2, v_3\big)\, u_2 \\
&= x^2 - \left(\int\limits_0^1 x^2\, dx\right) 1 - \left(\int\limits_0^1 x^2 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})\, dx\right) 2\sqrt{3}\big(x - \frac{1}{2}\big) \\
&= x^2 - \frac{1}{3} - 1\big(x - \frac{1}{2}\big) = x^2 - x + \frac{1}{6}\,. \\
u_3 &= \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \frac{\tilde{u}_3}{\sqrt{(\tilde{u}_3, \tilde{u}_3)}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \big(x^2 - x + \frac{1}{6}\big)^2\, dx}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{180}}} \\
&= 6\sqrt{5}\big(x^2 - x + \frac{1}{6}\big)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die Orthonormalbasis:

$$u_1 = 1, u_2 = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}),\ u_3 = 6\sqrt{5}(x^2 - x + \frac{1}{6}).$$