# Beispiellösung für Serie 9

## Aufgabe 9.1

**9.1a)** Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

√ (i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

**Lösung:** $\det A = 0$, da das Gleichungssystem $Ax = b$ im Fall $\det A \neq 0$ für beliebige rechte Seiten genau eine Lösung hat (siehe Buch, S. 63).

**9.1b)** Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, √ (ii) $\det A \neq 0$.

**Lösung:** $\det A \neq 0$, siehe Buch, S. 63.

**9.1c)** Sei $M$ eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

√ (i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, √ (iii) $\det M = \pm 1$.

**Lösung:** $\det M \neq 0$ und $\det M = \pm 1$ sind richtig. Weil orthogonale Matrizen regulär / invertierbar sind folgt $\det M \neq 0$, und da $M^{-1} = M^T$ bei orthogonalen Matrizen, folgt dass

$$1 = \det I_n = \det(M^{-1}M) = \det(M^T M) \overset{\text{Satz 3.6}}{=} \det M^T \cdot \det M \overset{\text{Satz 3.3}}{=} (\det M)^2 \ ,$$

also $\det M = \pm 1$.

**9.1d)** Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix $A$ liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. √ (ii) Falsch.

**Lösung:** Die Aussage ist falsch. Gemäss der LR-Zerlegung haben wir $PA = LR$. Da die Matrix $L$ Einsen in der Diagonalen hat und eine Dreiecksmatrix ist, folgt $\det L = 1$ (Lemma 3.2). Die Matrix $P$ ist orthogonal, dann $\det P = \pm 1$ (siehe Aufgabe 9.1c)). Aus Satz 3.6 folgt

$$\det P \det A = \det L \det R \ ,$$

und daraus (siehe auch Satz 3.9):

$$\det A = (\det P)^{-1} \cdot \det L \cdot \det R = (\pm 1) \cdot \det R \cdot 1 = \pm 60 \ .$$

**9.1e)** Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix $A$ im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, $\surd$ (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

**Lösung:** $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$, damit $\det A = -1 \cdot 2 - \alpha \cdot 1 = -2 - \alpha$ (siehe Buch, Gleichung (3.1) Seite 51).

**9.1f)** Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 9.1e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

$\surd$ (i) die leere Menge, (iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$,

**Lösung:**

$$\text{Das System} \quad \begin{array}{c} -x_1 + x_2 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 = 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} -x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1/2 \end{array} \quad \text{hat keine Lösung.}$$

## Aufgabe 9.2 [Prüfungsaufgabe, Frühling 07]

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**9.2a)** Berechnen Sie det $A$.

*Hinweis:* Wenden Sie nicht direkt das Gaussverfahren an, sondern nutzen Sie die Struktur der Matrix aus (stand nicht in der Prüfung).

**Lösung:** Wir betrachten im Folgenden

$$A^\top = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{bmatrix}$$

anstatt von $A$, da $\det\ A = \det\ A^\top$ und können somit Lemma 3.7 vom Buch anwenden. Eine analoge Aussage von Lemma 3.7 gilt auch für untere Blockdiagonalmatrizen (da $\det\ A = \det\ A^\top$).
<u>Erste Variante</u>: aus Lemma 3.7 vom Buch, wissen wir, dass für quadratische Matrizen der Gestalt

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

gilt: $\det\ M = \det\ A \cdot \det\ C$. Dies kann man natürlich rekursiv anwenden. Zerlege

$$A^\top = \begin{bmatrix} a & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \text{ wobei } C = \begin{bmatrix} D & E \\ 0 & F \end{bmatrix}, \text{ mit}$$
$$D = \begin{bmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{bmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \det\ A = &\det\ A^\top = a \cdot \det\ C = a \cdot \det\ D \cdot \det\ F \\ =&a \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{vmatrix} \\ =&a(-1)(-6+b)(-2-c) = a(b-6)(c+2) \end{aligned}$$

Zweite Variante (mit Gauss):

$$\det A = \det A^\top = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+c \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot a \cdot (-1) \cdot (b-6) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (c+2) = a(b-6)(c+2)$$

wie erwartet.

**9.2b)** Für welche Werte der Parameter $a, b, c, d$ ist die Matrix $A$ singulär?

**Lösung:** $A$ ist singulär, genau dann wenn $\det(A) = 0$. Damit ist die Matrix singulär, falls:

- $a = 0$; $b$, $c$, $d$ beliebig.
- $b = 6$; $a$, $c$, $d$ beliebig.
- $c = -2$; $a$, $b$, $d$ beliebig.

Insbesondere der Fall $a = 0$ ist offensichtlich, da dann alle Einträge der ersten Zeile von $A$ Null sind.

## Aufgabe 9.3 Polynomfit der Runge-Funktion

Die Runge-Funktion ist definiert als:

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{9.3.1}$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad $n$ approximieren. Wir fordern, dass $P_n$ die Funktion $f$ an $m$ gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten $x_i$ möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{9.3.2}$$

wobei $c$ die $n+1$ Koeffizienten des Polynoms $P_n$ sind.

**9.3a)** Bestimmen Sie die Matrix $A$ und die rechte Seite $b$.

**Lösung:** Ein Polynom vom Grad $n$ hat die allgemeine Form

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{9.3.3}$$

wobei die Koeffizienten $\{a_i\}_{i=0}^n$ die Unbekannten sind. Es soll möglichst genau gelten, dass

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Wir können das wie folgt in Matrix-Form schreiben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}}_{b}. \tag{9.3.4}$$

**9.3b)** Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der $QR$-Zerlegung von $A$. (Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.)

**Lösung:** Mit $A = QR$ finden wir:

$$\begin{aligned} \|r\|_2^2 &= \|Ac - b\|_2^2 \\ &= \|QRc - QQ^T b\|_2^2 \\ &= \|Q(Rc - Q^T b)\|_2^2 \\ &= \|Rc - Q^T b\|_2^2 \\ &= \|R_0 c - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2, \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

wobei wir die Matrix $R$ und den Vektor $d = Q^T b$ wie folgt aufgeteilt haben:

$$R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_0 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad d_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Dann lösen wir das lineare System $R_0 c = d_0$.

**9.3c)** Ergänzen Sie die MATLAB Funktion `runge_lstsq.m` die die Lösung vom Ausgleichsproblem (9.3.2) für beliebige $m$ und $n$ mit $m \geq n+1$ berechnet. Mit Hilfe der Funktion `runge_diff_degrees.m`, plotten Sie anschliessend die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$.

**Lösung:** Der folgende Code berechnet die Lösung für beliebige $m$ und $n$. Die Lösungen für $2 \leq n \leq 13$ sind in Abbildung 9.1 dargestellt.

```
function c = runge_lstsq(m,n)
  if (n+1)>m
    error('Error: it must hold m>=n+1');
  end

  a = -5;
  b = 5;
  x = linspace(a, b, m)';

  f = @(x)(1./(1. + x.^2));
```

```
  b = f(x);
  A = zeros(m,n+1);

  for i=1:n+1
    A(:,i) = x.^(i-1);
  end

  % Compute the QR-decomposition of A
  [Q,R] = qr(A);

  % Find the best approximation x
  d = Q'*b;
  R0 = R(1:n+1,1:n+1);
  d0 = d(1:n+1,1);
  c = R0\d0;

return;
```

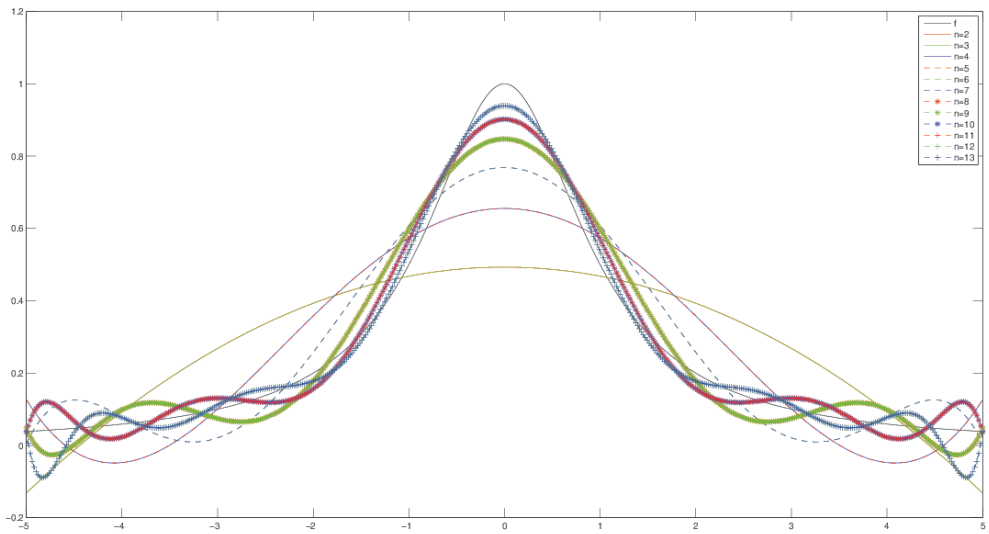


Abbildung 9.1: Lösungen für $m = 20$ und $2 \leq n \leq 13$.

## Aufgabe 9.4

**9.4a)** Zu den Zeiten $t_i$, $i = 1, \ldots, 10$, werden für die physikalische Grösse $f(t)$ die Messwerte $f_i$ beobachtet:

| $t_i$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 100 | 34 | 17 | 12 | 9 | 6 | 5 | 4 | 4 | 2 |

Wir setzen die unbekannte Funktion $f(t)$ als Linearkombination an der bekannten Funktionen $\phi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$, wobei

$$\phi_1(t) = \frac{1}{t},\ \phi_2(t) = \frac{1}{t^2},\ \phi_3(t) = e^{-(t-1)},\ \phi_4(t) = e^{-2(t-1)},\ \text{also } f(t) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \phi_j(t).$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $\gamma_j$ der Linearkombination so, dass

$$\sum_{i=1}^{10} [f(t_i) - f_i]^2 \qquad \text{minimal wird.}$$

Lösen Sie dieses Ausgleichsproblem mit MATLAB. Bilden Sie die Gauss'schen Normalgleichungen, und lösen Sie diese mit der LR–Zerlegung, d.h. durch Linksdivision.

**Lösung:**

$f(t_i) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \phi_j(t_i)$, wobei $\phi_1(t) = \frac{1}{t}$, $\phi_2(t) = \frac{1}{t^2}$, $\phi_3(t) = e^{-(t-1)}$, $\phi_4(t) = e^{-2(t-1)}$.

<u>Ziel</u>: minimiere $\left\| \begin{bmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_{10}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{10} \end{bmatrix} \right\|_2$.

Fehlergleichung: $Ax - \mathbf{f} = \mathbf{r}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{t_1} & \frac{1}{t_1^2} & e^{-(t_1-1)} & e^{-2(t_1-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{t_{10}} & \frac{1}{t_{10}^2} & e^{-(t_{10}-1)} & e^{-2(t_{10}-1)} \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}}_{=:x} - \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{10} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{f}} = \mathbf{r}$$

Löse die Normalgleichungen $A^\top A x = A^\top \mathbf{f}$ mit MATLAB:

```
format long;
clear A
t=[0.1:0.1:1]'; f=[100 34 17 12 9 6 5 4 4 2]';
A=[1./t 1./t.^2 exp(-(t-1)) exp(-2*(t-1))];

%Normalgleichungen A'*A x = A'*f
%LR-Zerlegung von A'*A
[L,U,P]=lu(A'*A);
%Loese die Normalgleichungen mit Hilfe von L,U und P
c=P*(A'*f);
y=L\c;
x=U\y
```

Dies ergibt die Lösung:

```
x =
   4.059115646965286
   0.614035171352460
  -2.531459328992872
   0.705759979941016
```

**9.4b)** Lösen Sie das Ausgleichsproblem nochmals mit Hilfe des QR-Zerlegungs-Zugangs in MATLAB.

**Lösung:**

Wir lösen das Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung (siehe Algorithmus auf Seite 113 im Buch):

```
[Q,R]=qr(A);                    % QR-Zerlegung
d=Q'*f;
xqr=R(1:4,1:4)\d(1:4)
```

Dies ergibt die Lösung:

```
xqr =
   4.059115646965547
   0.614035171352443
  -2.531459328993027
   0.705759979940927
```

**9.4c)** Ermitteln Sie, ab welcher Stelle sich **a)** von **b)** unterscheidet.
*Hinweis:* Verwenden Sie den MATLAB-Befehl `format long`.

**Lösung:** Die Lösungen in a) und b) unterscheiden sich ab der 12. Dezimale. Für grössere Probleme ist der Unterschied aber viel deutlicher!