Beispiellösung für Serie 11

Aufgabe 11.1

11.1a) Reelle, symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

√ (i) Richtig. (ii) Falsch.

Lösung: Richtig gem. Satz 7.8 auf S. 159.

11.1b) Zu jeder reellen $n \times n$ Matrix A gibt es eine orthonormale Eigenbasis.

(i) Richtig. √ (ii) Falsch.

Lösung: Falsch. Dies gilt nicht für allgemeine reelle $n \times n$ Matrizen. Es gilt jedoch für reelle, *symmetrische* Matrizen, gem. Satz 7.8 auf S. 160.

11.1c) Für eine diagonalisierbare Matrix gilt für einen Eigenwert λ, dass

(i) algebraische Vielfachheit $<$ geometrische Vielfachheit

(ii) algebraische Vielfachheit $>$ geometrische Vielfachheit

√ (iii) algebraische Vielfachheit $=$ geometrische Vielfachheit

Lösung: Für allgemeine Matrizen gilt gem. Satz 7.3 auf S. 153, dass algebraische Vielfachheit $\geq$ geometrische Vielfachheit. Bei diagonalisierbaren Matrizen gilt gem. Satz 7.6 auf S. 156 die Gleichheit.

11.1d) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

√ (i) Richtig. (ii) Falsch.

Lösung: Richtig, gem. Satz 7.4 auf S. 154.

11.1e) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(i) Richtig. √ (ii) Falsch.

Lösung: Falsch. Dies gilt nicht für allgemeine quadratische Matrizen. Es gilt jedoch für reelle, symmetrische Matrizen.

11.1f) Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

√ (i) Richtig. (ii) Falsch.

Lösung: Richtig, gem. Satz 7.2 auf S. 148.

11.1g) Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.

(i) Richtig. √ (ii) Falsch.

Lösung: Ist $B = T^{-1}AT$ und x Eigenvektor zum Eigenwert λ von A, so gilt gem. Satz 7.2 auf S. 148, dass $y = T^{-1}x$ Eigenvektor zum selben Eigenwert λ von B ist. Für $T \neq I$ ist die Aussage also im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 11.2

11.2a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I_3) = & \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 9(2-\lambda) \\ = & (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = & \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Eigenvektoren: $\underline{\lambda_1 = 2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 \text{ frei}, x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \text{z.B. } v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = 5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 \text{ frei}, x_2 = 0,\ x_1 = -x_3 \Rightarrow \text{z.B. } v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_3 = -1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 \text{ frei}, x_2 = 0,\ x_1 = x_3 \Rightarrow \text{z.B. } v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

11.2b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

Lösung: C reell und symmetrisch, also gilt nach Satz 7.7 ii), dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$ bereits senkrecht zueinander stehen, also $(v^{(1)}, v^{(2)}) = (v^{(1)}, v^{(3)}) = (v^{(2)}, v^{(3)}) = 0$. Da $v^{(1)}$ bereits normiert ist, setze $e^{(1)} = v^{(1)}$. Normiere nun $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$:

$$e^{(2)} = \frac{v^{(2)}}{\|v^{(2)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$e^{(3)} = \frac{v^{(3)}}{\|v^{(3)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

11.2c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n$$

.

Lösung: Wir fassen die normierten Eigenvektoren in einer Matrix T zusammen:

$$T = [e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir $C = TDT^{-1}$, wobei $D = \text{diag}(2, 5, -1)$. Da die Spalten von T ein Orthonormalsystem bilden, ist T orthogonal und folglich gilt $T^{-1} = T^T$.

Für die Matrixexponentialfunktion von $C = TDT^{-1}$ gilt allgemein (siehe Seite 163 im Buch):

$$\begin{aligned} e^C &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (TDT^{-1})^n \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} TD^nT^{-1} \\ &= T\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} D^n\right) T^{-1} \\ &= Te^DT^{-1} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^C &= Te^DT^{-1} = T\text{diag}(e^2, e^5, e^{-1})T^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e^2 & 0 \\ e^5/\sqrt{2} & 0 & -e^5/\sqrt{2} \\ e^{-1}/\sqrt{2} & 0 & e^{-1}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (e^5 + e^{-1})/2 & 0 & (-e^5 + e^{-1})/2 \\ 0 & e^2 & 0 \\ (-e^5 + e^{-1})/2 & 0 & (e^5 + e^{-1})/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11.2d) Prüfen Sie b) und c) mit MATLAB nach.

Hinweis: Beachten Sie den Unterschied zwischen den Funktionen `exp` und `expm`.

Lösung: Man kann die orthonormale Eigenbasis auch mit MATLAB erhalten, indem man die QR–Zerlegung der Eigenvektoren-Matrix betrachtet. Sei $V = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\right]$ und $V = QR$. Die Spalten von Q liefern eine orthonormale Eigenbasis von C.

```
format long;
C=[2 0 -3; 0 2 0; -3 0 2];
[V,D]=eig(C)
[Q,R]=qr(V);
b1=Q(:,1), b2=Q(:,2), b3=Q(:,3)
%Zum Vergleich:
e1=[0 1 0]', e2=[1 0 -1]'/sqrt(2)
e3=[1 0 1]'/sqrt(2)
```

```
b1 =
  -0.707106781186547
                   0
  -0.707106781186547
b2 =
     0
     1
     0
b3 =
  -0.707106781186547
                   0
   0.707106781186548
e1 =
     0
     1
     0
e2 =

   0.707106781186547
                   0
  -0.707106781186547
e3 =
   0.707106781186547
                   0
   0.707106781186547
```

Wir sehen, dass die Eigenbasen `b1,b2,b3` (mit QR berechnet) und `e3,e1,e2` (mit Schmidt berechnet) übereinstimmen: `b1=-e3`, `b2=e1` und `b3=-e2`. Das Vorzeichen hat aber keinen Einfluss auf der Orthonormalität der Basen.

Die Matrixexponentialfunktion kann man analog wie von Hand oder mit der MATLAB-Funktion `expm` berechnen (man beachte, dass dies nicht dasselbe wie `exp` ist, welche elementweise die Exponentialfunktion berechnet):

```
T=[e1 e2 e3];
expC=T*diag(exp([2,5,-1]))*T'
expm(C)
```

```
expC =
  74.390519271874012                   0 -74.022639830702559
                   0   7.389056098930650                   0
 -74.022639830702559                   0  74.390519271874012
ans =
  74.390519271874140                   0 -74.022639830702687
                   0   7.389056098930652                   0
 -74.022639830702701                   0  74.390519271874126
```

Wir sehen, dass das Ergebnis übereinstimmt.

Aufgabe 11.3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11.3a) Diagonalisieren Sie die Matrix, d. h. bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda(1-\lambda) - 1) - 1(-\lambda) \\ &= -\lambda(-\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(1+\lambda)(\lambda - 2) \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow\ \lambda_1 &= -1, \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2 \end{aligned}$$

$$E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\ E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\},\ E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

11.3b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot{z} = az$ ist gegeben durch $z(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die

Lösung $z(t) = ce^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z_0 = z(0) = c$ bestimmt werden kann.

Lösung: Der hier beschriebene Lösungsweg entspricht der Transformationsmethode (siehe Buch S. 179ff): Aus $\dot{y} = TDT^{-1}y$ folgt durch Multiplikation von links mit T^{-1}:

$$\dot{x} = T^{-1}\dot{y} = T^{-1}TDT^{-1}y = Dx$$

Also gilt $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$ mit der Lösung

$$x_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &y(t) = Tx(t) \\ &\Rightarrow\ y(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

11.3c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = y(0) = Tx(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

Gausselimination:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 2.5 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ c_3 = \frac{5}{6},\ c_2 = \frac{1}{2}, c_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ &\Rightarrow\ y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{5}{6}e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \end{aligned}$$

11.3d) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Lösung: Grenzwertbetrachtung: wenn $t \to \infty$, folgt (für $c_3 \neq 0$):
$x_1(t) \to 0$, $x_2(t) \to c_2$, $x_3(t) \to \pm\infty$.
Damit $\lim_{t\to\infty} y_i(t) = 0$, für $i = 1, 2, 3$ gilt, muss auch $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$ gelten, also $c_2 = c_3 = 0$, c_1 beliebig.

$$x(0) = \begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}.\ \Rightarrow\ y(0) = Tx(0) = \alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$