Beispiellösung für Serie 12

Aufgabe 12.1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch positiv definit Matrix.

12.1a) Alle Eigenwerte von A sind reell.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Folgt aus Satz 7.7.

12.1b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Sei λ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Aus Satz 7.7 erhält man, dass $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$0 < v^T A v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|_2^2,$$

und da $\|v\|_2^2 > 0$, gilt $\lambda > 0$.

12.1c) A ist diagonalisierbar.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Folgt aus Satz 7.8.

12.1d) Sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dann sind alle Eigenwerte von A reell.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Da A symmetrisch ist, folgt die Behauptung aus Satz 7.7.

Aufgabe 12.2

12.2a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A symmetrisch positiv definit ist.

Lösung: Es ist offensichtlich, dass A symmetrisch ist. Es bleibt zu zeigen, dass A positiv definit ist.

Erste Variante: Für $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ hat man

$$\begin{aligned} x^T A x =& [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ =& [2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2 + x_3, x_2 + 2x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ =& 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ =& (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0. \end{aligned}$$

Zweite Variante: Da A symmetrisch ist, kann man die Eigenwerte berechnen und zeigen, dass alle positiv sind. Man hat

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda I) =& \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ =& (2-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 1) - (2-\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Da alle Eigenwerte von A positiv sind, folgt, dass A positiv definit ist.

Aufgabe 12.3

12.3a) Seien A und B zwei symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $A + B$ symmetrisch positiv definit ist.

Lösung: Aus Satz 2.4 vom Buch folgt $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$ und damit ist $A + B$ symmetrisch. Da A und B positiv definit sind, hat man für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0,$$

und daher ist $A + B$ auch positiv definit.

12.3b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst *negativ definit*, wenn

$$x^T Ax < 0,$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass A positiv definit ist, genau dann wenn $-A$ negativ definit ist.

Lösung: Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x^T(-A)x = -(x^T Ax).$$

Die Behauptung folgt dann aus

$$x^T Ax > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Leftrightarrow x^T(-A)x = -(x^T Ax) < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

12.3c) Seien A und B zwei symmetrische $n \times n$-Matrizen, so dass $A + B$ positiv definit ist. Sind A und B positiv definit?

Lösung: Nicht unbedingt. Zum Beispiel gilt für A positiv definit und $B = -\frac{1}{2}A$, dass $A + B$ positiv definit ist, aber B negativ definit ist.

Aufgabe 12.4

12.4a) Für $\phi \in [0, 2\pi]$ seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung von A, B und C.

Lösung: Die Methode, die wir benutzen, folgt aus Satz 9.6. Sei A eine $m \times n$ Matrix (der Einfachheit halber nehmen wir $m \leq n$ an). Dann gibt es eine orthogonale $m \times m$-Matrix U, eine orthogonale $n \times n$-Matrix V und eine $m \times n$-Matrix S, so dass

$$A = USV^T,$$

wobei $S = [\hat{S} \mid 0]$ und $\hat{S} = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_m)$ eine diagonale $m \times m$-Matrix ist. Es folgt aus Satz 9.6 $ii)$, dass die Zahlen s_i^2 die Eigenwerte von AA^T sind. Ausserdem erfüllen die Spalten $u^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ von U und die Spalten $v^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ von V

$$\begin{aligned} Av^{(i)} &= s^{(i)}u^{(i)}, && i = 1, \ldots, m, \\ A^T u^{(i)} &= s^{(i)}v^{(i)}, && i = 1, \ldots, m, \\ Av^{(i)} &= 0, && i = m+1, \ldots, n, \text{ wenn } m < n. \end{aligned}$$

Für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$$\begin{aligned} A^T A v^{(i)} &= s_i A^T u^{(i)} = s_i^2 v^{(i)}, \\ AA^T u^{(i)} &= s_i A v^{(i)} = s_i^2 u^{(i)}, \end{aligned}$$

und so sind $u^{(i)}$ und $v^{(i)}$ die Eigenvektoren von AA^T und $A^T A$ für die Eigenwerte s_i^2, beziehungsweise. Wenn $m < n$ hat man $A^T A v^{(i)} = 0$ für $i = m+1, \ldots, n$ und dann sind die $v^{(i)}$ Eigenvektoren von $A^T A$ für den Eigenwert $\lambda = 0$.

Zusammenfassend gilt: Die Spalten von U bzw. V sind Eigenvektoren von AA^T bzw. $A^T A$.

Die obigen Überlegungen führen für $m \leq n$ zu folgendem Algorithmus zur Berechnung einer Singulärwertzerlegung:

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte s_i^2 (absteigend sortiert) und zugehörige (orthonormale) Eigenvektoren $u^{(i)}$ von $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$;

(ii) Sei $1 \leq k \leq m$, so dass $s_i^2 > 0$ für $i = 1, \ldots, k$ und $s_i^2 = 0$ für $i = k+1, \ldots, m$

- Für $1 \leq i \leq k$: Berechnen Sie $v^{(i)} = \frac{1}{s_i} A^T u^{(i)}$;
- Für $k+1 \leq i \leq n$: $v^{(i)}$ sind (orthonormale) Eigenvektoren von $A^T A$ zum Eigenwert $\lambda = 0$.

(i) Um eine Singulärwertzerlegung von A zu berechnen, bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von AA^T. Man hat

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \det(AA^T - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von AA^T sind dann $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ und die zugehörige (normierten) Eigenvektoren sind

$$u^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von A^TA sind

$$v^{(1)} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ v^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es folgt dann, dass

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von A ist.

(ii) Da B quadratisch ist, kann man entweder die Eigenwerte von B^TB oder BB^T berechnen. Man hat

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \det(B^TB - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 10-\lambda & 20 \\ 20 & 40-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (10-\lambda)(40-\lambda) - 400 = \lambda(\lambda - 50), \end{aligned}$$

und die Eigenwerte von B^TB sind $\lambda_1 = 50$ und $\lambda_2 = 0$. Die zugehörige Eigenvektoren sind

$$v^{(1)} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ v^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von BB^T sind

$$u^{(1)} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ u^{(2)} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es folgt dann, dass

$$U = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ V = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von B ist.

(iii) Wir wissen, dass C orthogonal ist. Da $C^TC = CC^T = I$, sind alle Eigenwerte von C^TC und CC^T 1. Es folgt, dass $S = I$. Offensichtlich führt dann

$$U = C,\ V = I,$$

oder

$$U = I,\ V = C^T.$$

auf eine Singulärwertzerlegung von C. Man sieht dann, dass die Singulärwertzerlegung nicht eindeutig ist.

12.4b) Lösen Sie **a)** für $\phi = \frac{\pi}{4}$ mit MATLAB.

Hinweis: Um eine Singulärwertzerlegung zu berechnen, kann man die Funktion `svd` benutzen.

Lösung:

Eine Singulärwertzerlegung kann mit der Funktion `svd` berechnet werden. Es gilt:

```
A = [1 1 0 ; 0 1 1];
[U,S,V] = svd(A);
```

```
U =
   -0.7071   -0.7071
   -0.7071    0.7071
S =
    1.7321         0         0
         0    1.0000         0
V =
   -0.4082   -0.7071    0.5774
   -0.8165    0.0000   -0.5774
   -0.4082    0.7071    0.5774
```

```
B = [1 2 ; 3 6];
[U,S,V] = svd(B);
```

```
U =
   -0.3162   -0.9487
   -0.9487    0.3162
S =
    7.0711         0
         0    0.0000
V =
   -0.4472   -0.8944
   -0.8944    0.4472
```

```
phi = pi/4;
C = [cos(phi) 0 -sin(phi) ; 0 1 0 ; sin(phi) 0 cos(phi)];
[U,S,V] = svd(C);
```

```
U =
   -0.7071    0.7071         0
         0         0   -1.0000
   -0.7071   -0.7071         0
S =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
V =
    -1     0     0
     0     0    -1
     0    -1     0
```

Man sieht, dass hier noch eine andere Singulärwertzerlegung für C berechnet wird. Im Prinzip entspricht U der Matrix $-C$ und V der Matrix $-I$, aber die zweite und dritte Spalten sind jeweils vertauscht.