# Beispiellösung für Serie 13

## Aufgabe 13.1

**13.1a)** Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(i) $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$ mit $x, a, b \in \mathbb{R}$

**Falsch.** $\mathcal{F}(x+y) = ax + ay + b \neq ax + ay + 2b = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für $b \neq 0$.

$\surd$ (ii) $\mathcal{F} : x \mapsto ax$ mit $x, a \in \mathbb{R}$

**Richtig.** Für alle $a, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}(x+y) = a(x+y) = ax + ay = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$
$$\mathcal{F}(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha a x = \mathcal{F}(x)$$

(iii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

**Falsch.** $\mathcal{F}(x+y) = Ax + Ay + b \neq Ax + Ay + 2b = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für $b \neq 0$.

$\surd$ (iv) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

**Richtig.** Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$
$$\mathcal{F}(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha \mathcal{F}(x)$$

(v) $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

**Falsch.** $\mathcal{F}(x+y) = (x+y)^2 + 3(x+y) \neq x^2 + 3x + y^2 + 3y = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für beliebige $x, y$.

(vi) $\mathcal{F} : x \mapsto exp(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

**Falsch.** $\mathcal{F}(x+y) = exp(x+y) = exp(x)exp(y) \neq exp(x) + exp(y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für beliebige $x, y$.

**13.1b)** Wir betrachten die Ebene $E$ in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_2 = x_3$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf $E$ projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

√ (i) Die Matrix $A$, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

**Richtig.** Siehe Rechnung unten.

(ii) Die Matrix $A$, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

**Falsch.**

√ (iii) Es gilt dim(Kern $A$) = 1.

**Richtig.** Der Kern ist aufgespannt durch den einen Vektor senkrecht zur Ebene.

(iv) Es gilt dim(Kern $A$) = 2.

**Falsch.**

√ (v) Es gilt dim(Bild $A$) = 2.

**Richtig.** Das Bild ist gerade die ganze Ebene.

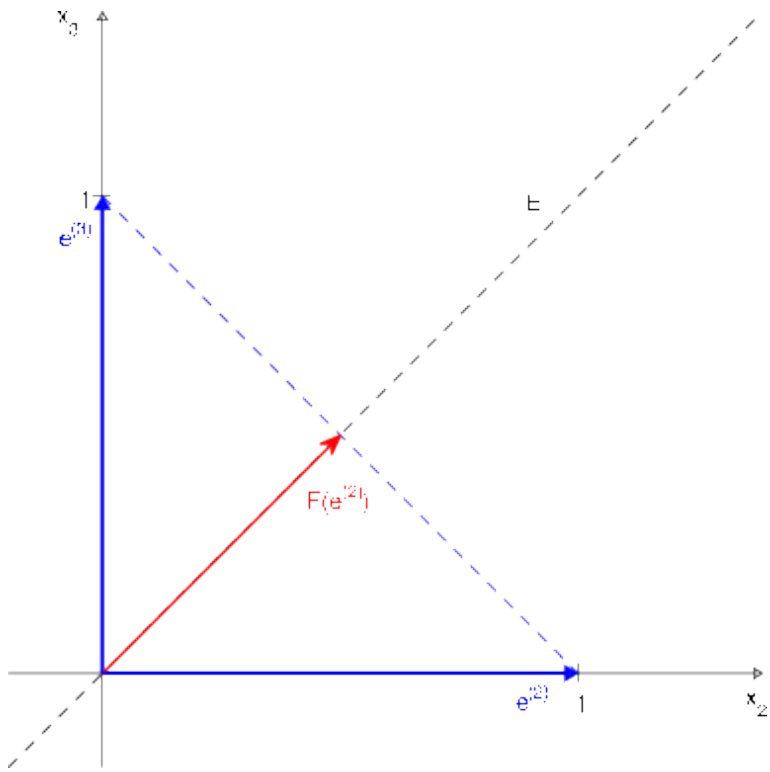
(vi) Es gilt dim(Bild $A$) = 1.

**Falsch.**

**Lösung:** Betrachte die Standardbasis $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$. Da $e^{(1)}$ bereits in $E$ liegt, folgt:

$$\mathcal{F}\big(e^{(1)}\big) = e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: a^{(1)}.$$

Um $\mathcal{F}(e^{(2)})$, $\mathcal{F}(e^{(3)})$ zu bestimmen, betrachte die Ebene $\{x_1 = 0\}$ (siehe Bild). Die Abbildung $\mathcal{F}$ projiziert $e^{(2)}$ (bzw. $e^{(3)}$) orthogonal auf $E$ (also parallel zu $(0, -1, 1)^\top$).




Es folgt aus dem Bild (z.B. mit Pythagoras) und aus Symmetriegründen, dass

$$\mathcal{F}\left(e^{(3)}\right) = \mathcal{F}\left(e^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} =: a^{(2)} = a^{(3)}.$$

Es folgt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Kern $A$ kann man einfach mit Gauss bestimmen (Lösungsmenge von $Ax = 0$):

$$\text{Kern}\, A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Man sieht, dass Kern $A$ der Geraden span $\{(0, -1, 1)^\top\}$ entspricht, also der Gerade, die senkrecht zu $E$ steht und durch die Ursprung des Koordinatensystems geht.
Daraus folgt: dim(Kern $A$)=1. Es gilt: Bild $A$=span $\{a^{(1)},\, a^{(2)},\, a^{(3)}\}$. Da $a^{(2)} = a^{(3)}$, folgt

$$\text{Bild}\, A = \text{span}\,\{a^{(1)},\, a^{(2)}\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{13.1.1}$$

Daraus folgt: dim(Bild $A$)=2.
<u>Bemerkung</u>: Man sieht, dass Bild $A$ der Ebene $E$ entspricht, wie erwartet.

## Aufgabe 13.2

**13.2a)** Lösen Sie das Ausgleichungsproblem

$$Ac = b,$$

für

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

**Hinweis:** Betrachten Sie für die Singulärwertzerlegung hier hauptsächlich das Eigenwertproblem zu $AA^T$ (und nicht zu $A^TA$), um die Berechnungen zu vereinfachen.

**Lösung:** Wir beschreiben zuerst wie man im Allgemeinen ein Ausgleichungsproblem mit einer Singulärwertzerlegung lösen kann. Sei $A$ eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$. Dann gibt es eine orthogonale $m \times m$-Matrix $U$, eine orthogonale $n \times n$-Matrix $V$ und eine $m \times n$-Matrix $S$, so dass

$$A = USV^T.$$

Die Matrix $S$ hat Diagonalgestalt, d. h.

$$S = \left[\begin{array}{c} \hat{S} \\ \hline 0 \end{array}\right],$$

wobei $\hat{S} = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ eine diagonale $n \times n$-Matrix ist. Mit $A = USV^T$ hat man

$$\begin{aligned} \|r\|_2^2 &= \|Ac - b\|_2^2 \\ &= \|USV^Tc - b\|_2^2 \\ &= \|U(SV^Tc - U^Tb)\|_2^2 \\ &= \|SV^Tc - d\|_2^2 \\ &= \|\hat{S}V^Tc - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2, \end{aligned}$$

wobei wir den Vektor $d = U^Tb$ wie folgt aufgeteilt haben:

$$d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \; d_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Falls $\hat{S}$ invertierbar ist, d. h. alle $s_i$ positiv sind, löst man das lineare Gleichungssystem $\hat{S}V^Tc = d_0$, was zu

$$c = V\hat{S}^{-1}d_0$$

führt. Das ist die eindeutige kleinste Quadrate-Lösung.

Wir betrachten nun noch den Fall, bei dem $\hat{S}$ nicht invertierbar ist, d. h. $s_i = 0$ für $i = k+1, \ldots, n$ ($k = \operatorname{Rang} A$). Es gibt dann mehrere Vektoren $c$, die $\|r\|_2^2$ minimieren. Wir suchen daher die Lösung, bei der zusätzlich $\|c\|_2$ minimal ist.

Dazu führen folgende Variablentransformation durch: Sei $y := V^Tc$ und da $V$ orthogonal ist, hat man $\|y\|_2 = \|c\|_2$. Wir suchen dann $y$ mit $\hat{S}y = d_0$ (im kleinsten Quadrate-Sinn) und so dass $\|y\|_2$ minimal ist. Da $\hat{S}$ diagonal ist, hat man

$$s_iy_i = (d_0)_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Für $i > k$ sind die $y_i$ freie Parameter, da $s_i = 0$. Mit der Bedingung, dass $\|y\|_2$ minimal ist, folgt

$$y_i = \begin{cases} \frac{(d_0)_i}{s_i} & i \leq k, \\ 0 & i > k. \end{cases}$$

Das kann man in Matrixform als

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{s_k} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (d_0)_1 \\ \vdots \\ (d_0)_k \\ (d_0)_{k+1} \\ \vdots \\ (d_0)_n \end{bmatrix} = \hat{S}^+ d_0$$

schreiben, wobei $\hat{S}^+$ die Pseudoinverse von $\hat{S}$ genannt wird. Zu guter Letzt erhalten wir die Lösung des Ausgleichsproblems aus $c = Vy$.

Wie in Serie 12 erklärt wurde, folgt aus Satz 9.6, dass die Spalten von $U$ Eigenvektoren von $AA^T$ sind. Man beachte die Blockstruktur von $AA^T$. Wir nutzen diese mit Hilfe von Lemma 3.7 aus und erhalten

$$0 \stackrel{!}{=} \det(AA^T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 36-\lambda & 36 & 0 & 0 \\ 36 & 36-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36-\lambda & 36 \\ 36 & 36-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= ((36-\lambda)^2 - 36^2)((9-\lambda)^2 - 9^2) = (-72\lambda + \lambda^2)(-18\lambda + \lambda^2) = \lambda^2(-72+\lambda)(-18+\lambda).$$

Die Eigenwerte von $AA^T$ sind dann $\lambda_1 = 72$, $\lambda_2 = 18$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren sind

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von $A^T A$ sind

$$v^{(1)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; v^{(3)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Die ersten beiden Eigenvektoren von $A^T A$ kann und soll man dabei über die Beziehung $A^T u^{(i)} = s^{(i)} v^{(i)}$ als $v^{(i)} = \frac{1}{s^{(i)}} A^T u^{(i)}$ berechnen.

Damit ist

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \sqrt{72} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von $A$.

Es gilt dann

$$d = U^T b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

und damit folgt

$$c = V\hat{S}^+ d_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{72}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5/2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**13.2b)** Lösen Sie **a)** mit MATLAB.

**Lösung:** Man kann entweder die Pseudoinverse von Hand oder mit der Funktion `pinv` berechnen. Die Erklärungen in **a)** führen auf den folgenden Code:

```
A = [-2 4 4 ; -2 4 4 ; 2 2 -1 ; -2 -2 1];
b = [3 ; 6 ; 3 ; -3];

% Singularwertzerlegung von A
[U,S,V] = svd(A);
S_hat = S(1:3,1:3);
d = U'*b;
d_0 = d(1:3);

% Von Hand
tol=max(size(A))*eps(S_hat(1,1));
for i=1:3
    if S_hat(i,i)>tol
        y(i)=d_0(i)/S_hat(i,i);
    else
        y(i)=0;
    end
end
c_1 = V*y'

% Mit der Pseudoinversen von S_hat
c_2 = V*pinv(S_hat)*d_0
% oder direkt mit der Pseudoinversen von A
c_3 = pinv(A)*b
```

```
c_1 =
    0.4167
    1.1667
    0.1667

c_2 =
    0.4167
    1.1667
    0.1667
```

```
c_3 =
    0.4167
    1.1667
    0.1667
```

Die Lösung entspricht bei allen drei Varianten der in **a)** berechneten Lösung.

**Bemerkung:** In Zeile 13 des Codes müsste man theoretisch überprüfen, ob `S_hat(i,i)>0` ist. Das ist jedoch numerisch instabil und deswegen führt man eine kleine Toleranz ein.

## Aufgabe 13.3

Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ in sich.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

**13.3a)** Durch welche Matrix $A$ wird $\mathcal{F}$ (in der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$) beschrieben?

**Lösung:** Wir bestimmen die Matrix wie auf Seiten 120–121 im Buch beschrieben. Wir bestimmen die Bilder der Standardbasis $e^{(1)}, e^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\big(e^{(1)}\big) =& \mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =: a^{(1)} \\ \mathcal{F}\big(e^{(2)}\big) =& \mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =: a^{(2)} \end{aligned}$$

Da diese den Koordinaten bezüglich der Standardbasis entsprechen, wird $\mathcal{F}$ durch die Matrix

$$A = (a^{(1)}, a^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

beschrieben.

**13.3b)** Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{F}$ längentreu ist.

**Lösung:** Wir können die Längentreue auf verschiedene Arten zeigen. Der erste Weg ist, indem man direkt zeigt, dass die Bedingung in der Definition auf Seite 135 im Buch erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \|x'\|_2^2 =& \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1)\right)^2 \\ =& \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2) \\ =& x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

Damit gilt $\|\mathcal{F}(x)\| = \|x'\| = \|x\|$, was bedeutet, dass $\mathcal{F}$ längentreu ist.

Gemäss Satz 6.10 genügt es aber auch zu zeigen, dass die Matrix $A$ orthogonal ist bzw. dass die Spalten von $A$ eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^2$ bilden:

$$(a^{(1)}, a^{(1)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$(a^{(2)}, a^{(2)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$
$$(a^{(1)}, a^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Die ersten zwei Gleichungen zeigen die Normiertheit von $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$, während die letzte Gleichung die Orthogonalität $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ zeigt. Damit bilden $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ eine orthonormale Basis (gemäss Korollar 4.7) und es folgt, dass $\mathcal{F}$ längentreu ist.

## Aufgabe 13.4

Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung $\mathcal{F} : V \to W$, wobei $V$, $W$ endlichdimensionale Vektorräume bezeichnen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

**13.4a)** Sind $x_1, \ldots, x_k,\ k \in \mathbb{N}$ in $V$ linear abhängig, so sind auch $\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_k)$ linear abhängig.

**Lösung:** Aus $x_1, \ldots, x_k,\ k \in \mathbb{N}$ in $V$ linear abhängig folgt, dass $\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k$ existieren, die nicht alle $0$ sind und für die gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0.$$

Es gilt weiter

$$0 = \mathcal{F}(0) = \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{F}(x_i)$$

aufgrund der Linearität von $\mathcal{F}$. Somit folgt die lineare Abhängigkeit von $\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_k)$, da

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{F}(x_i) = 0$$

für $\lambda_i$ nicht alle $0$.

**13.4b)** Sind die Vektoren $\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_k)$ linear unabhängig, so sind auch $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.

**Lösung:** Kontraposition von **a)**.

## Aufgabe 13.5

Sei $\mathcal{P}_4$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $< 4$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_4$ in sich:

$$\mathcal{P}_4 \ni P(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad Q(x) = P'(x) \in \mathcal{P}_4,$$

die jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = P'(x)$ zuordnet ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach $x$).

**13.5a)** Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

**Lösung:** Seien $P(x),\ P_1(x),\ P_2(x) \in \mathcal{P}_4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P_1(x) + P_2(x)) =& (P_1(x) + P_2(x))' = P_1'(x) + P_2'(x) = \mathcal{F}(P_1(x)) + \mathcal{F}(P_2(x)) \\ \mathcal{F}(\alpha\, P(x)) =& (\alpha\, P(x))' = \alpha\, P'(x) = \alpha\, \mathcal{F}(P(x))\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ist linear.

**13.5b)** Gegeben sei im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1,\ x,\ x^2,\ x^3$. Durch welche Matrix $A$ wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

**Lösung:** Wir haben sowohl im Urbildraum als im Bildraum die Basis $1,\ x,\ x^2,\ x^3$, d. h. $b^{(1)} = c^{(1)} = 1$, $b^{(2)} = c^{(2)} = x$, $b^{(3)} = c^{(3)} = x^2$, $b^{(4)} = c^{(4)} = x^3$ für die Basis von $\mathcal{P}_4$. Wir suchen $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass

$$\mathcal{F}(b^{(j)}) = \sum_{k=1}^{4} a_{kj}\, c^{(k)}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

In Koordinaten:

$$\mathcal{F}\big(b^{(1)}\big) = \mathcal{F}(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \qquad \Rightarrow \qquad a^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F}\big(b^{(2)}\big) = \mathcal{F}(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \qquad \Rightarrow \qquad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F}\big(b^{(3)}\big) = \mathcal{F}(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \qquad \Rightarrow \qquad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F}\big(b^{(4)}\big) = \mathcal{F}(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \qquad \Rightarrow \qquad a^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A = (a^{(1)},\ a^{(2)},\ a^{(3)},\ a^{(4)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Aufgabe 13.6

Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von $V^3$ nach $V^3$.

**13.6a)** Durch die Wahl der neuen Basis

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Matrix $T$ der Koordinatentransformation.

**Lösung:** Bezeichne mit $x$ die alten Koordinaten und mit $y$ die neuen:

$$\begin{aligned} x = Ty &= y_1\, t^{(1)} + y_2\, t^{(2)} + y_3\, t^{(3)} \\ &= y_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=:T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**13.6b)** Durch welche Matrix $B$ wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten (in $W^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis) beschrieben?

**Lösung:**

$$\begin{array}{ccc} x \in V^3 & \overset{A}{\longmapsto} & x' \in V^3 \\ T \uparrow & & \uparrow T \\ y \in W^3 & \overset{B}{\longmapsto} & y' \in W^3 \end{array}$$

Es gilt also $B = T^{-1}AT$, wobei

$$AT = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Statt $T^{-1}$ zu berechnen, löse $TB = AT$ mit Gausselimination nach $B$ auf:

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|} -2 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{r|rrr|rrr|} & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{|rrr|rrr|} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**13.6c)** Interpretieren Sie die Abbildung in den ursprünglichen Koordinaten (in $V^3$) geometrisch.

**Lösung:** $B$ ist die Darstellung der linearen Abbildung in den neuen Koordinaten. Aus der Diagonalform von $B$ kann man sehen, dass es sich in diesen neuen Koordinaten um eine Projektion entlang des Basisvektors $e^{(3)}$ auf die Ebene, die durch die 2 Basisvektoren $e^{(1)}$ und $e^{(2)}$ aufgespannt wird, gefolgt durch eine Punktspiegelung um den Nullpunkt handelt.

In den alten Koordinaten ist $A$ somit eine Projektion entlang $t^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ auf die Ebene $\operatorname{span}\left\{ t^{(1)},\, t^{(2)} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, gefolgt durch eine Punktspiegelung um den Nullpunkt (oder äquivalent dazu, da $t^{(3)}$ orthogonal zu $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ steht: gefolgt durch eine Drehung um 180 Grad um die $t^{(3)}$-Achse).