Dr. V. Gradinaru
A. Hiltebrand
D. Devaud

Online-Test 2

Einsendeschluss: Montag, der 15.12.2014 10:00 Uhr

Dieser Test ist als Angebot zu verstehen. Er dient, seriös bearbeitet, als Repetition des bisherigen Vorlesungsstoffes und als Training für die Prüfung.

---

1. Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

$$Ax = 0 \text{ besitzt eine nichttriviale Lösung } \iff \dim(\text{Kern}A) \geq 1.$$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Kern$A$ ist definiert als Menge aller Vektoren x mit $Ax = 0$. Wenn es x gibt, die nicht trivial sind, gibt es mindestens einen freien Parameter und somit muss also $\dim(\text{Kern}A) \geq 1$ gelten und umgekehrt.

2. Gegeben seien die Fehlergleichungen

$$Ax - c = r$$

mit

$$A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \text{Rang}A = 2.$$

Dann haben die Normalgleichungen

$$A^T Ax = A^T c$$

eine eindeutige Lösung.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Normalgleichungen haben eine eindeutige Lösung, falls die Matrix A maximalen Spaltenrang hat, also in diesem Fall Rang$A = 3$. Es gilt jedoch Rang$A = 2$.

3. Wir betrachten Fehlergleichungen $Ax - c = r$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $c = [-2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}]^T$. Aus der QR-Zerlegung von A kenne man zudem die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Es gilt:

√ (a) Die Matrix R aus der QR-Zerlegung lautet $R = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Die Matrix R aus der QR-Zerlegung lautet $R = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Die Lösung des Ausgleichsproblems lautet $x = [1, 1]^T$

√ (d) Die Lösung des Ausgleichsproblems lautet $x = [-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1]^T$

Wir wissen, dass $A = QR$. Da Q orthogonal ist, folgt, dass

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Lösung des Ausgleichsproblems finden wir durch Lösen der ersten zwei Gleichungen von $Rx = Q^T c = [1, 2, 3]^T$ als $x = [-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1]^T$.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $Ax = 0$ <u>nur</u> die triviale Lösung hat. Dann gilt:

√ (a) $\dim(\text{Bild}A) = n$

(b) $\dim(\text{Bild}A) = n - 1$

√ (c) $\dim(\text{Kern}A) = 0$

(d) $\dim(\text{Kern}A) = 1$

Es gilt allgemein $\dim(\text{Bild}A) + \dim(\text{Kern}A) = n$. Falls $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat, so ist $\dim(\text{Kern}A) = 0$ und somit auch $\dim(\text{Bild}A) = n$.

5. Die Dimension des Kerns von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

beträgt ...

(a) 0.

(b) 1.

√ (c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

Es gilt allgemein bei $m \times n$ Matrizen, dass $\dim(\text{Bild}A) = \text{Rang}A$, und $\dim(\text{Bild}A) + \dim(\text{Kern}A) = n$. Der Rang ist die Anzahl linear unabhängiger Spalten oder Zeilen von A. Die ersten zwei Zeilen von A sind linear unabhängig, die dritte Zeile ergibt sich als Summe der ersten beiden, also ist $\text{Rang}A = 2$. Mit $n = 4$ folgt, dass $\dim(\text{Kern}A) = n - \dim(\text{Bild}A) = 2$.
Alternativ kann man $\text{Rang}A$ mit Hilfe des Gaussverfahrens bestimmen.

6. Der Kern von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

√ (b) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

√ (c) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(e) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Der Kern einer Matrix besteht aus den Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Gemäss der vorigen Aufgabe ist die Dimension des Kerns hier 2, wir brauchen also mindestens 2 linear unabhängige Vektoren, um den Kern aufzuspannen. Durch Matrix-Vektor Multiplikation prüfen wir, welche Vektoren das homogene Gleichungssystem erfüllen. Sind mindestens 2 davon linear unabhängig, so spannen diese den Kern auf.

7. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

√ (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Die Vektoren $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ spannen gemäss Aufgabe 6 den Kern auf. Es gilt $\dim(\mathrm{Kern} A) = 2$ gemäss Aufgabe 5. Somit kann eine Basis aus höchstens 2 Vektoren bestehen. Damit sind die obigen Vektoren eine Basis von $\mathrm{Kern} A$.

8. Das Bild von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

√ (a) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

√ (c) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

√ (e) $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Das Bild ist immer der Vektorraum aufgespannt durch die einzelnen Spaltenvektoren der Matrix. Die Matrix hat Rang 2 gemäss Aufgabe 5. Um das Bild aufzuspannen, muss man also mindestens zwei linear unabhängigen Spaltenvektoren aussuchen.

9. Eine Basis des Bildes von

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

√ (e) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Das Bild ist immer der Vektorraum aufgespannt durch die einzelnen Spaltenvektoren der Matrix. Die Matrix hat Rang 2 gemäss Aufgabe 5. Also besteht eine Basis des Vektorraums aus 2 Vektoren, die den Vektorraum aufspannen. Gemäss Aufgabe 8 spannen die Vektoren der 1., 3. bzw. 5. Antwort das Bild der Matrix auf. Nach Satz 4.3 iii) sind 2 Vektoren, die einen 2-dimensionalen Vektorraum erzeugen linear unabhängig, also ist $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des Bildes.

10. Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ den Koordinatenvektor $[-1, -1]^T$.
Der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis ist ...

(a) $[\frac{1}{2}, 0]^T$

(b) $[-1, -1]^T$

(c) $[0, -2]^T$

√ (d) $[2, 0]^T$

(e) $[1, 1]^T$

Wenn Basisvektoren $b^{(1)}, ..., b^{(n)}$ im $\mathbb{R}^n$ und Koordinatenvektor $[k_1, ..., k_n]^T$ eines Vektors k gegeben sind, so bedeutet das, dass

$$k = k_1 b^{(1)} + ... + k_n b^{(n)}.$$

Hier sind wir im $\mathbb{R}^2$ und haben als Basis die beiden Vektoren $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.
Der Vektor mit Koordinaten $[-1, -1]^T$ bezüglich dieser Basis ist also

$$-1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

hat also bezüglich der Standardbasis die Koordinaten $[2, 0]^T$.

11. Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_1$ (1-Norm eines Vektors).

(a) 1

(b) $\sqrt{5}$

√ (c) 3

(d) 2

Wir rechnen: $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_1 = |-1| + |0| + |2| = 3$

12. Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_\infty$ (Maximumnorm eines Vektors).

(a) 0

(b) $\sqrt{5}$

(c) 5

√ (d) 2

Wir rechnen: $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max(|-1|, |0|, |2|) = 2$

13. Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_2$ (Euklidische Norm eines Vektors).

(a) 0

√ (b) $\sqrt{5}$

(c) 5

(d) $\sqrt{3}$

Wir rechnen: $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

14. Für eine orthogonale Matrix A mit Inverser A^{-1} gilt:

√ (a) $A^{-1} = A^T$

(b) $A^{-1} = -A$

(c) Die Inverse existiert nicht notwendigerweise.

Orthogonalität einer Matrix ist definiert über die Eigenschaft, dass $A^T A = I$, was $A^{-1} = A^T$ impliziert.

15. Für

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

gilt:

(a) A_1 ist orthogonal.

√ (b) A_2 ist orthogonal.

(c) Weder A_1 noch A_2 ist orthogonal.

Damit eine Matrix orthogonal ist, müssen ihre Spalten orthonormal sein. Dies ist nur bei A_2 erfüllt.

16. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und 2-Norm. Es sei A eine reelle $n \times n$–Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\left(x, A^T y\right) = (A\,x, y)$.

√ (b) Wenn gilt $A^T = A^{-1}$, dann folgt $(A\,x, A\,y) = (x, y)$ für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

√ (c) Wenn gilt $A^T = A^{-1}$, dann folgt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

√ (d) Es sei B eine weitere reelle $n \times n$–Matrix. Wenn gilt $A^T = A^{-1}$ und $B^T = B^{-1}$, dann hat das Produkt AB eine Inverse und es gilt $(AB)^{-1} = (AB)^T$.

- Es gilt: $(x, A^T y) = x^T A^T y = (Ax)^T y = (Ax, y)$.
- $(Ax, Ay) = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay = x^T A^{-1} Ay = x^T y = (x, y)$.
- Es gilt $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|Ax\|$.
- Es gilt $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$.

17. Die Eigenwerte der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sind:

(a) $0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$

√ (b) $1, 2, 1$

(c) $0, 1, 3$

Da die Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, sind die Eigenwerte gerade die Diagonalelemente (zum Beweis dazu kann man das charakteristische Polynom aufstellen).

18. Für die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ gilt:

(a) Die Eigenwerte von A sind $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

(b) Die Eigenwerte von A sind reelle Zahlen

(c) A hat eine Basis von rellen Eigenvektoren

√ (d) A hat eine Basis von Eigenvektoren

(e) Das charakteristische Polynom von A hat den Grad 2

(f) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind reell

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1) \\ &= (1-\lambda)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) - \lambda\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) - \lambda\right) \end{aligned}$$

Dieses hat Grad drei und zwei nicht-reelle Nullstellen, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ und $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Die zugehörigen Eigenvektoren können nicht reell sein. Weil die Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 haben, folgt mit Satz 7.3 auf p. 153, dass auch ihre geometrische Vielfachheit genau 1 ist, und somit gibt es eine Basis von Eigenvektoren. Zusammenfassend ist die Matrix A komplex diagonalisierbar, nicht jedoch reell diagonalisierbar.

19. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

√ (a) $x^{(1)} = [1, -2, 1]^T$

(b) $x^{(2)} = [0, 3, 2]^T$

√ (c) $x^{(3)} = [1, 1, 1]^T$

Wir multiplizieren die Vektoren $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ mit der Matrix A. Kommt ein Vielfaches des enstprechenden Vektors dabei heraus, so handelt es sich um einen Eigenvektor.

20. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

haben 0 als Eigenwert?

√ (a) A_1.

(b) A_2.

√ (c) A_3.

(d) Keine.

Falls Null ein Eigenwert ist, so gilt $0 = \det(A - 0I) = \det(A)$, in anderen Worten, die Matrix muss singulär sein. Da A_3 eine Nullspalte hat, ist diese Matrix singulär. In A_1 können wir die ersten beiden Spalten addieren und erhalten die dritte Spalte, also ist auch diese Matrix singulär. A_2 hingegen ist regulär, wie man durch Ausführen des Gaussverfahren sieht:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \\ 0 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{c} \\ 3 \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}}$$

Also ist 0 kein Eigenwert von A_2.

21. Wir betrachten folgende zwei Anfangswertprobleme (AWP):

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt:

√ (a) Die Lösung $y(t)$ des ersten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ wird für t genügend gross grösser als 10.

(b) Die Lösung $y(t)$ des ersten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ bleibt auch für t beliebig gross kleiner als 10.

(c) Die Lösung $y(t)$ des zweiten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ wird für t genügend gross grösser als 10.

√ (d) Die Lösung $y(t)$ des zweiten AWPs hat die Eigenschaft: $||y(t)||$ bleibt auch für t beliebig gross kleiner als 10.

Um die Aussagen überprüfen zu können, betrachten wir die Eigenwerte der Matrizen. Wir werden feststellen, dass die Matrizen einfach, also insbesondere halbeinfach, sind und die Transformationsmethode angewendet werden kann (siehe im Buch Seite 179ff).

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = Ay(t)$ ist eine Linearkombination von $e^{\lambda_j t}u^{(j)}$, wobei $u^{(j)}$ ein Eigenvektor der $n \times n$ Matrix A zum Eigenwert λ_j ist:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} u^{(j)}.$$

Hat jeweils einer von den Eigenwerten λ_j einen Realteil, der grösser ist als 0, so wird $||y(t)||$ immer grösser mit wachsendem t, sofern der entsprechende Koeffizient c_j nicht 0 ist. Falls alle Realteile strikt kleiner sind als 0, geht $||y(t)||$ gegen Null für t gegen ∞.

Wir sehen:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ (siehe Aufgabe 18).
  Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist offensichtlich $[1, 0, 0]^T$.
  Einen Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ bestimmen wir mit Hilfe des Gaussverfahrens:

$$i \begin{array}{|ccc|} 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{array} \xrightarrow{(E)_2} \begin{array}{|ccc|} 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Also ist z. B. $[0, i, 1]^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Damit ist dann $[0, -i, 1]^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

T ist die Matrix der Eigenvektoren:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir transformieren das System mittels $y(t) = Tx(t)$. Für die Anfangsbedingung muss $Tx(0) = y(0)$ gelöst werden:

$$\begin{array}{c} \\ \\ -i \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & -i & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 2 & i \end{array}\right]$$

Durch Rückwärtseinsetzen bekommen wir $x(0) = [1, -i/2, i/2]^T$. Also ist z. B. der Koeffizient c_1 bezüglich des Eigenvektors zum Eigenwert 1 nicht 0 und die Lösung kann also nicht beschränkt bleiben.

Wir hätten dies auch schneller sehen können, da alle Eigenwerte einen Realteil grösser als 0 haben und die Anfangsbedingung nicht der Nullvektor ist.

- $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$.
  Ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist offensichtlich $[1, 0]^T$.
  Einen Eigenvektor zum Eigenwert 3 bestimmen wir mit dem Gaussverfahren, welches aber nur ein Rückwärtseinsetzen des Systems

$$\left[\begin{array}{cc} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

erfordet. Ein Eigenvektor ist z. B. $[1, 2]^T$.

T ist wiederum die Matrix der Eigenvektoren:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wir transformieren das System mittels $y(t) = Tx(t)$. Für die Anfangsbedingung muss $Tx(0) = y(0)$ gelöst werden. Auch dies ist nur Rückwärtseinsetzen und wir erhalten: $x(0) = [1, 0]^T$. Der Koeffizient c_2 zum Eigenwert 3 ist 0 und der andere Eigenwert -1 hat einen strikt negativen Realteil. Dies impliziert, dass die Lösung gegen 0 strebt für t gegen ∞ und dass $||y(t)||$ beschränkt wird durch die Norm der Anfangsbedingung, die hier 1 ist.

22. Für die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ gilt:

√ (a) A hat drei paarweise verschiedene Eigenwerte.

(b) A hat keine Basis von Eigenvektoren.

(c) Die geometrische Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes von A ist 2.

√ (d) Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 1.

√ (e) Die Eigenwerte von A und A^T sind gleich.

Die Eigenwerte von A sind gegeben durch

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) \overset{!}{=} 0.$$

Die Eigenwerte sind somit 1, 4 und 6 und paarweise verschieden (allgemein sind die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix genau die Diagonaleinträge). Daher haben alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 und auch geometrische Vielfachheit 1 (letzteres weil die geometrische Vielfachheit mindestens 1 und kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist). Insbesondere ist die Summe der geometrischen Vielfachheiten gleich 3, weshalb A eine Basis von Eigenvektoren hat. Somit sind die erste und vierte Aussage richtig, aber die zweite und dritte Aussage falsch.

Die Eigenwerte von $A^\top$ sind die Nullstellen von

$$\det(A^\top - \lambda I_3).$$

Es gilt

$$\det(A^\top - \lambda I_3) = \det((A - \lambda I_3)^\top) = \det(A - \lambda I_3),$$

somit hat $A^\top$ die gleichen Eigenwerte wie A und die letzte Aussage ist richtig.

23. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

sind diagonalisierbar?

√ (a) A_1

√ (b) A_2

(c) A_3

(d) Keine.

Wir berechnen die Eigenwerte von A_1:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \det(A_1 - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 9) + 1(-\lambda + 6) - 2(3 + 2\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 9\lambda + (-\lambda) + 6 - 6 - 4\lambda) = -\lambda^3 - 14\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 14) \end{aligned}$$

Wir erhalten: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{14}i$, $\lambda_3 = -\sqrt{14}i$. Damit hat jeder Eigenwert die algebraische Vielfachheit 1. Die Matrix ist also einfach und damit diagonalisierbar.

Die Matrix A_2 ist reell und symmetrisch. Nach Satz 7.8 i) ist A_2 diagonalisierbar.

Wir berechnen die Eigenwerte von A_3:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \det(A_3 - \lambda I) = -\lambda\left((1-\lambda)(-1-\lambda) + 3\right) - 1 \cdot 2(-1-\lambda) + 1(-2) \\ &= \lambda - \lambda^3 - 3\lambda + 2 + 2\lambda - 2 = -\lambda^3 \end{aligned}$$

Wir erhalten: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also ist 0 ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3.

Um zu sehen, ob die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen übereinstimmt, berechnen wir die Eigenvektoren:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \\ 1 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow x_3$ freier Parameter, $x_2 = 0, x_1 = x_3$

Also ist die geometrische Vielfachheit 1 und die Matrix damit nicht diagonalisierbar.

24. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

√ (a) A halbeinfach $\Rightarrow$ A diagonalisierbar

√ (b) es existiert keine Eigenbasis von $A \Rightarrow A$ nicht diagonalisierbar

(c) es existiert eine Eigenbasis von $A \Rightarrow A$ einfach

√ (d) es existiert eine Eigenbasis von $A \Rightarrow A$ halbeinfach

√ (e) A reell, symmetrisch $\Rightarrow$ A diagonalisierbar

√ (f) A diagonalisierbar $\Rightarrow$ A ähnlich zu einer Diagonalmatrix

(g) A diagonalisierbar $\Rightarrow$ A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix

√ (h) A reell, symmetrisch $\Rightarrow$ A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix

(i) A orthogonal $\Rightarrow$ A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix

Nach Satz 7.6 im Buch sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Die Matrix A ist halbeinfach.
- Die Matrix A besitzt eine Eigenbasis.
- Die Matrix A ist diagonalisierbar.

Nach Definition (siehe Seite 133) heisst die Matrix A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D genau dann, wenn eine reguläre Matrix T existiert, so dass $A = T^{-1}DT$. Letzteres gilt jedoch genau dann, wenn

$$D = TAT^{-1} = (T^{-1})^{-1}A(T^{-1}),$$

was bedeutet, dass A diagonalisierbar ist. Also ist auch die Aussage „A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix“ äquivalent zu den schon genannten Aussagen.

Einfachheit einer Matrix ist nicht dasselbe wie Halbeinfachheit: Betrachte z. B. I_2. I_2 hat eine Eigenbasis (jede Basis des $\mathbb{R}^2$ ist eine Eigenbasis von I_2), aber I_2 hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2. Also ist I_2 nicht einfach.

Eine reelle, symmetrische Matrix ist gemäss Satz 7.8 i) diagonalisierbar. Es gilt sogar nach iii), dass die Transformationsmatrix T, so dass $T^{-1}AT$ diagonal ist, orthogonal gewählt werden kann. Also ist A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Noch eine Bemerkung zur Orthogonalität einer Matrix: Im Buch fehlt die Voraussetzung, dass die Matrix reell sein muss; wir setzten dies hier jedoch analog zur Vorlesung voraus.

A diagonalisierbar ist nicht gleichbedeutend mit A orthogonal diagonalisierbar: Betrachte z. B. die Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A hat die Eigenwerte -1 und 1, ist also einfach und damit (reell) diagonalisierbar.

Offensichtlich ist $[1, 0]^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 und $[1, 2]^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Die Matrix ist einfach, also sind die Eigenvektoren bis auf die Skalierung eindeutig bestimmt. Die Transformationsmatrix T,

welche die Matrix A diagonalisiert, enthält eine Eigenbasis von A. Man bemerke jedoch, dass die Eigenvektoren $[1,0]^T$ und $[1,2]^T$ nicht orthogonal sind. Also kann die Matrix T nicht orthogonal gewählt werden, was bedeutet, dass A nicht orthogonal-diagonalisierbar ist.

Aus A orthogonal folgt nicht, dass A orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist: Z. B. hat die orthogonale Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ die Eigenwerte i und $-i$. Sie ist damit ähnlich zur Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(i, -i)$. Da die Eigenwerte echt komplex sind, sind auch die Eigenvektoren echt komplex. Die Transformationsmatrix T, die A diagonalisiert, enthält eine Eigenbasis von A und kann damit nicht reell und also auch nicht orthogonal gewählt werden.

25. Lösen Sie folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{aligned} -\ x+\ 2y+\ 6 &= r_1 \\ -2x+\ 7y+27 &= r_2 \\ -2x+10y+33 &= r_3 \end{aligned}$$

Um das Rechnen zu erleichtern geben wir die Matrix Q an:

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die Lösung des Ausgleichsproblems $(x^*, y^*)^T$ bzw. für den minimalen Residuenvektor r^* gilt:

(a) $x^* = 2$, $y^* = 3$

√ (b) $x^* = 2$, $y^* = -3$

(c) $x^* = -2$, $y^* = 3$

(d) $x^* = -2$, $y^* = -3$

(e) $\|r^*\| = 1$

(f) $\|r^*\| = 2$

√ (g) $\|r^*\| = 3$

Wir schreiben die Gleichungen in der Form $Ax - c = r$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 7 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -6 \\ -27 \\ -33 \end{bmatrix}$$

Die Lösung besteht aus drei Schritten (vergleiche Algorithmus Seite 113 im Buch):

- Wir berechnen die Matrix R der QR-Zerlegung: Es gilt $A = QR$. Daraus folgt (da Q orthogonal):

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Wir transformieren c:

$$d = Q^T c = \begin{bmatrix} -42 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Wir bestimmen die Lösung durch Rückwärtseinsetzen: $R_0 x^* = d_0$. Dies führt zu $y^* = -3$ und $x^* = 2$.

Die Norm des minimalen Residuenvektors r^* erfüllt $\|r^*\| = \|d_1\|$, wobei hier $d_1 = 3$. Damit gilt: $\|r^*\| = 3$.

26. Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Für alle $b \in \mathbb{R}$ sind beide Eigenwerte von A nicht negativ.

√ (b) Es gibt $b \in \mathbb{R}$, so dass mindestens ein Eigenwert von A negativ ist.

(c) Es gibt $b \in \mathbb{R}$, so dass beide Eigenwerte von A negativ sind.

Bestimmen der Eigenwerte:

$$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - b^2.$$

Das führt zu

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-b^2)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1 + b^2} = 1 \pm |b|.$$

Für $|b| \leq 1$ sind beide Eigenwerte nicht negativ und für $|b| > 1$ ist einer der Eigenwerte positiv und der andere negativ.

27. Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix. Dann ist die Blockmatrix $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ symmetrisch. Sei $x = [y, z]^T$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ, d. h.

$$Bx = \lambda x \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \text{ und damit } \begin{matrix} Az = \lambda y \\ A^T y = \lambda z \end{matrix}$$

√ (a) $-\lambda$ ist ebenfalls ein Eigenwert von B.

(b) $-\lambda$ ist im Allgemeinen kein Eigenwert von B.

√ (c) Für $\lambda \neq 0$ ist λ^2 ist ein Eigenwert von $A^T A$.

(d) Für $\lambda \neq 0$ ist λ^2 ist im Allgemeinen kein Eigenwert von $A^T A$.

(e) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ hat B vier verschiedene Eigenwerte.

√ (f) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ hat B zwei Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit 2.

Wir betrachten den Vektor $[y, -z]^T$:

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Az \\ A^T y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} y \\ -z \end{bmatrix}.$$

Also ist $[y, -z]^T$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $-\lambda$.

Desweiteren gilt:

$$A^T A z = A^T(\lambda y) = \lambda^2 z$$

z kann für $\lambda \neq 0$ nicht der Nullvektor sein, da $z = 0$ wegen $A0 = \lambda y$ zu $\lambda = 0$ oder zu $y = 0$ führt, was beides ein Widerspruch ist. Damit ist z ein Eigenvektor von $A^T A$ zum Eigenwert λ^2.

Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist jeder Vektor $[y, y]^T$ mit $0 \neq y \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$$

ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 1. Weiter ist dann $[y, -y]^T$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert -1. Damit sind die geometrischen Vielfachheiten von 1 und -1 jeweils mindestens 2. Das führt darauf, dass diese genau zwei sind und zudem den algebraischen Vielfachheiten entsprechen. Man kann sich natürlich auch durch Rechnen davon überzeugen.

28. Sei A eine reelle 2×2-Matrix, die orthogonal und symmetrisch ist.

(a) A hat die Form $\begin{bmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} -\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

√ (b) A muss nicht einer dieser zwei Formen entsprechen.

√ (c) A hat nur Eigenwerte, die 1 oder -1 sind.

(d) A kann auch einen Eigenwert haben, der weder 1 noch -1 ist.

Da A eine symmetrische 2×2-Matrix ist, hat A allgemein die Form

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wegen der Orthogonalität von A sind zudem die Spalten orthonormal, d. h.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ ab + bc &= 0 \\ b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned}$$

Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich $b = 0$ durch:

- $b = 0$: Dann gilt

$$\begin{matrix} a^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = \pm 1 \\ c = \pm 1 \end{matrix}$$

- $b \neq 0$: Dann gilt $a + c = 0$ und weiter $c = -a$. Weiter haben wir

$$a^2 = 1 - b^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1-b^2}.$$

(Also muss zudem $|b| \leq 1$ gelten.) Die Matrix A hat also die Form

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{bmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} -\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}.$$

Man bemerke, dass für $b = 0$ $A = I$ oder $A = -I$ gelten kann, was beides keiner der vorgegebenen Formen entspricht.

Eine Bedingung für die Eigenwerte erhält man direkt aus der Orthogonalität und der Symmetrie der Matrix: Sei x ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ, d. h. $Ax = \lambda x$. Dann gilt:

$$x = Ix = A^T Ax = AAx = \lambda Ax = \lambda^2 x.$$

Da x nicht der Nullvektor sein kann, muss gelten $\lambda^2 = 1$ und damit $\lambda = \pm 1$. Alternativ können die Eigenwerte auch direkt berechnet werden.

29. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

und die zugehörigen quadratischen Formen

$$f(x,y) = [x,y]A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g(x,y) = [x,y]B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

√ (a) f kann in der Form $f(x,y) = (ax+by)^2 + cy^2$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ und $a,c > 0$ geschrieben werden.

(b) g kann in der Form $g(x,y) = (ax+by)^2 + cy^2$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ und $a,c > 0$ geschrieben werden.

√ (c) A ist symmetrisch positiv definit.

(d) B ist symmetrisch positiv definit.

Hinweis: Quadratisch ergänzen.

Es gilt

$$f(x,y) = 1x^2 + 2 \cdot 2xy + 9y^2 = (1x+2y)^2 - 4y^2 + 9y^2 = (1x+2y)^2 + 5y^2.$$

und damit ist A symmetrisch positiv definit, da für $[x,y]^T \neq 0$ der erste oder der zweite Summand strikt positiv ist.

Es gilt

$$g(x,y) = 1x^2 + 2 \cdot 3xy + 9y^2 = (1x+3y)^2 - 9y^2 + 9y^2 = (1x+3y)^2 + 0y^2.$$

Damit ist B nicht symmetrisch positiv definit, da für $x = -3y$ beide Summanden verschwinden.