Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 7

Aufgabe 7.1

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \text{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $(x, y) := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

7.1a) Zeigen Sie, dass (x, y) in V ein Skalarprodukt definiert.

7.1b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

7.1c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 7.2

7.2a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bez. des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

7.2b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

bezüglich der in Teilaufgabe 7.2a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, d. h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

7.2c) Lösen Sie Teilaufgabe 7.2a) mit Hilfe der QR-Zerlegung in Matlab.
Hinweis: In MATLAB liefert der Befehl `[Q,R] = qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

Aufgabe 7.3

Sei $V = \mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad strikt kleiner als 3. Auf V ist durch $\big(p_1(x), p_2(x)\big) := \int_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$ ein Skalarprodukt gegeben. Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V, indem Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $1, x, x^2$ anwenden.

Abgabe:

Semesterwoche 9 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.