Dr. V. Gradinaru
D. Devaud
A. Hiltebrand

Serie 8

Aufgabe 8.1

8.1a) Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$ Matrix A $(m > n)$ gegeben mit Q orthogonal und $R = \left[\begin{array}{c} R_0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$. Die Spalten von A seien linear abhängig. Dann ist die $n \times n$ Matrix R_0

(i) singulär. (ii) regulär.

8.1b) Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalgleichungen

(i) genau eine Lösung. (ii) unendlich viele Lösungen. (iii) keine Lösung.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

x_i	0	1	2
y_i	5.41	5.17	5.93

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird (lineare Regression).

8.1c) Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

8.1d) Die Matrix der Normalgleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

8.1e) Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

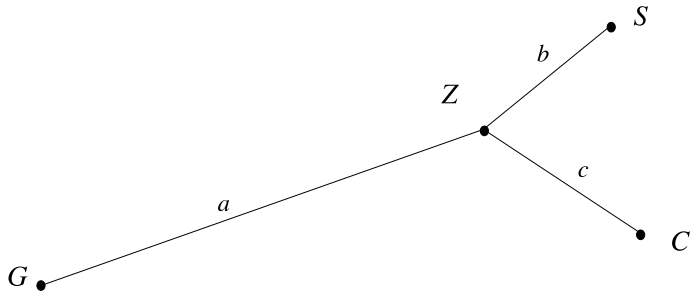
(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$ (ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$ (iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Aufgabe 8.2

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht, und er interessiert sich nun für die tatsächlichen Distanzen a, b, c.

8.2a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalgleichungen.

8.2b) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in MATLAB.

8.2c) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'-Operator in MATLAB.

Aufgabe 8.3

Gegeben seien die Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

8.3a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, d. h. zeigen Sie, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind,
- paarweise orthogonal sind,
- eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

8.3b) Gegeben sei der Vektor $v = [1/\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2}/\sqrt{3}]^T$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion w von v auf die $v^{(1)}$-$v^{(2)}$-Ebene.

Hinweis: Der Vektor w liegt in der $v^{(1)}$-$v^{(2)}$-Ebene und $v - w$ ist orthogonal zu allen Vektoren in der Ebene.

Abgabe:

Semesterwoche 10 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.