Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 9

Aufgabe 9.1

9.1a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

9.1b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

9.1c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, (iii) $\det M = \pm 1$.

9.1d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

9.1e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

9.1f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 9.1e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

(i) die leere Menge,

(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4,$

(iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 9.2 [Prüfungsaufgabe, Frühling 07]

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9.2a) Berechnen Sie $\det A$.

Hinweis: Wenden Sie nicht direkt das Gaussverfahren an, sondern nutzen Sie die Struktur der Matrix aus (stand nicht in der Prüfung).

9.2b) Für welche Werte der Parameter a, b, c, d ist die Matrix A singulär?

Aufgabe 9.3 Polynomfit der Runge-Funktion

Die Runge-Funktion ist definiert als:

$$f(x) := \frac{1}{1 + x^2}\,. \tag{9.3.1}$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Wir fordern, dass P_n die Funktion f an m gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten x_i möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{9.3.2}$$

wobei c die $n + 1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

9.3a) Bestimmen Sie die Matrix A und die rechte Seite b.

9.3b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung von A. (Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.)

9.3c) Ergänzen Sie die MATLAB Funktion `runge_lstsq.m` die die Lösung vom Ausgleichsproblem (9.3.2) für beliebige m und n mit $m \geq n+1$ berechnet. Mit Hilfe der Funktion `runge_diff_degrees.m`, plotten Sie anschliessend die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$.

Aufgabe 9.4

9.4a) Zu den Zeiten t_i, $i = 1, \ldots, 10$, werden für die physikalische Grösse $f(t)$ die Messwerte f_i beobachtet:

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f_i	100	34	17	12	9	6	5	4	4	2

Wir setzen die unbekannte Funktion $f(t)$ als Linearkombination an der bekannten Funktionen $\phi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$, wobei

$$\phi_1(t) = \frac{1}{t},\ \phi_2(t) = \frac{1}{t^2},\ \phi_3(t) = e^{-(t-1)},\ \phi_4(t) = e^{-2(t-1)},\ \text{also } f(t) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \phi_j(t).$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten γ_j der Linearkombination so, dass

$$\sum_{i=1}^{10} [f(t_i) - f_i]^2 \qquad \text{minimal wird.}$$

Lösen Sie dieses Ausgleichsproblem mit MATLAB. Bilden Sie die Gauss'schen Normalgleichungen, und lösen Sie diese mit der LR–Zerlegung, d.h. durch Linksdivision.

9.4b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem nochmals mit Hilfe des QR-Zerlegungs-Zugangs in MATLAB.

9.4c) Ermitteln Sie, ab welcher Stelle sich **a)** von **b)** unterscheidet.
Hinweis: Verwenden Sie den MATLAB-Befehl `format long`.

Abgabe:

Semesterwoche 11 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.