Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 10

Aufgabe 10.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen.

10.1a) Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^2.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

10.1b) Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist λ auch ein Eigenwert von A^2.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

10.1c) Ist x ein Eigenvektor von A und auch ein Eigenvektor von B, dann ist x ein Eigenvektor von $A + B$.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

10.1d) Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B, dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

10.1e) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + I$.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

10.1f) Ist $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, dann hat $A = u \cdot u^\top$ den Eigenvektor u.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

Aufgabe 10.2

10.2a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

10.2b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

10.2c) Überprüfen Sie Ihr Resultat von **a)** und **b)** in MATLAB.
Hinweis: `[V,D] = eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix C in der Diagonalen von D und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von V zurück.

Aufgabe 10.3

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.3a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der MATLAB Funktion `eig`.

10.3b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

10.3c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Abgabe:

Semesterwoche 12 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.