R. Hiptmair
S. Pintarelli
E. Spindler

Herbstsemester 2014

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Endsemesterprüfung HS14

Name	MuLö	Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	17.12.2014	

1	2	3	4	Total
3P	4P	4P	4P	15P

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- Prüfungsdauer: 20 Minuten + 5 Minuten für die Übertragung der Ergebnisse auf das Antwortblatt.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- **Kreuzen Sie bitte die Multiple-Choice Antworten auf dem *separaten Antwortblatt* an.**
- **Falls Sie Antworten auf dem *separaten Antwortblatt* korrigieren wollen, benutzen Sie bitte Tipp-Ex und löschen Ihre Antwort mitsamt dem Antwortkästchen.**

Regeln Multiple-Choice:

- Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen haben keinen Einfluss auf die Punkte.
- Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für eine Aufgabe erreicht wird, werden für die Aufgabe null Punkte vergeben.

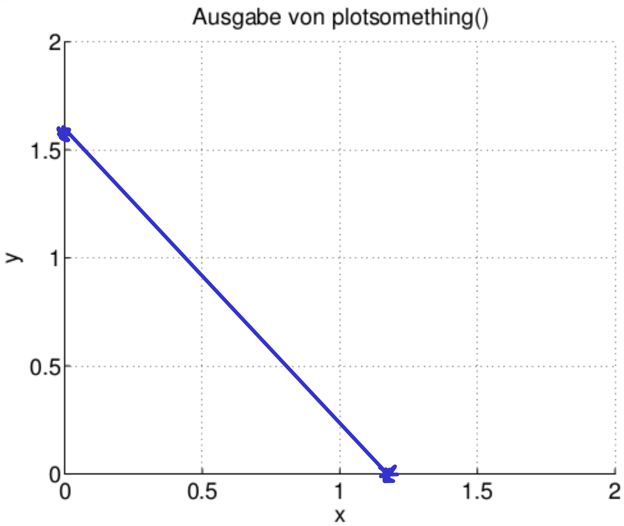
Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Analytische Geometrie in MATLAB

(1a) Gegeben sei die unten stehende Funktion `plotsomething(a,b)`. Zeichnen Sie die Ausgabe für `plotsomething([3;4],[-3;4])`. (3P)

```
function plotsomething(a,b)
    na = norm(a);
    nb = norm(b);
    x = a/na + b/nb;
    y = a/na - b/nb;
    plot([x(1);y(1)],[x(2);y(2)],'*-');
    axis([0,2,0,2]);
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    title('Ausgabe von plotsomething()');
end
```

1.(a)



Rechenweg:

$na = nb = 5$

$x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1.6\end{pmatrix}$

$y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.2\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 2 Kern/Bild/Dimensionssatz

Kreuzen Sie auf dem *beiliegenden Antwortblatt* an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede falsche Antwort gibt es einen Punkt Abzug. (4P)

✓ **(2a)** Es gibt Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ so, dass die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top(\mathbf{a}\mathbf{b}^\top)\mathbf{x} = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

f. **(2b)** Für jeden Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\dim\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top\mathbf{x} = 0\} = n - 1$.

✓ **(2c)** Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ gilt $\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

f. **(2d)** Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \cap \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

Aufgabe 3 Orthogonalität / Skalarprodukt

Kreuzen Sie auf dem *beiliegenden Antwortblatt* an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede falsche Antwort gibt es einen Punkt Abzug. (4P)

f **(3a)** $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

f. **(3b)** Für eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m > n$ ist $\mathbf{p} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})\mathbf{B}^\top\mathbf{q}$ ist die orthogonale Projektion von $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ auf $\mathrm{Bild}(\mathbf{B})$.

f. **(3c)** $\langle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

f. **(3d)** Ist $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ mit $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$, die volle QR-Zerlegung von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, dann ist $\{(\mathbf{Q})_{:,n+1}, \ldots, (\mathbf{Q})_{:,m}\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})^\perp$.

(nur für Rang(A)=n)

Aufgabe 4 MATLAB

Kreuzen Sie auf dem beiliegenden Antwortblatt an, welche der abgebildeten Matrizen vom jeweiligen Code erzeugt wurde. (4P)

Jede falsche Antwort gibt einen Punkt Abzug.

(4a) Vergleichen Sie Listing 4.1 und Abbildung 4.1. (1P)

Listing 4.1: Code zu Teilaufgabe (4a)

```
function [A] = a1_mat(n)
i = [ones(1,n), n:-1:1, n*ones(1,n)];
j = [1:n, 1:n, 1:n];
s = ones(1,3*n);
A = sparse(i,j,s);
```

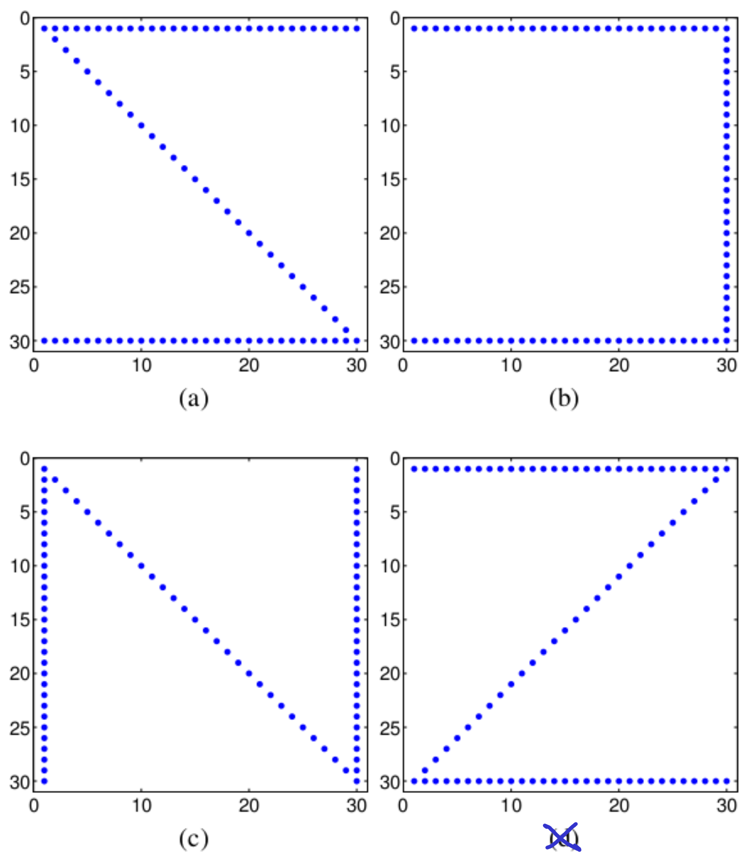


Abbildung 4.1: Aufgabe (4a): Abbildungen zu Listing 4.1

(4b) Vergleichen Sie Listing 4.2 und Abbildung 4.2. (1P)

Listing 4.2: Code zu Teilaufgabe (4b)

```
function [A] = a2_mat(m)
I = [m-2:-1:1]; I = [I, I+2]; I = [I, 1:m];
J = [1:m-2]; J = [J, J+2]; J = [J, m:-1:1];
s = ones(2*(m-2)+m,1);
A = sparse(I,J,s,m,m);
```

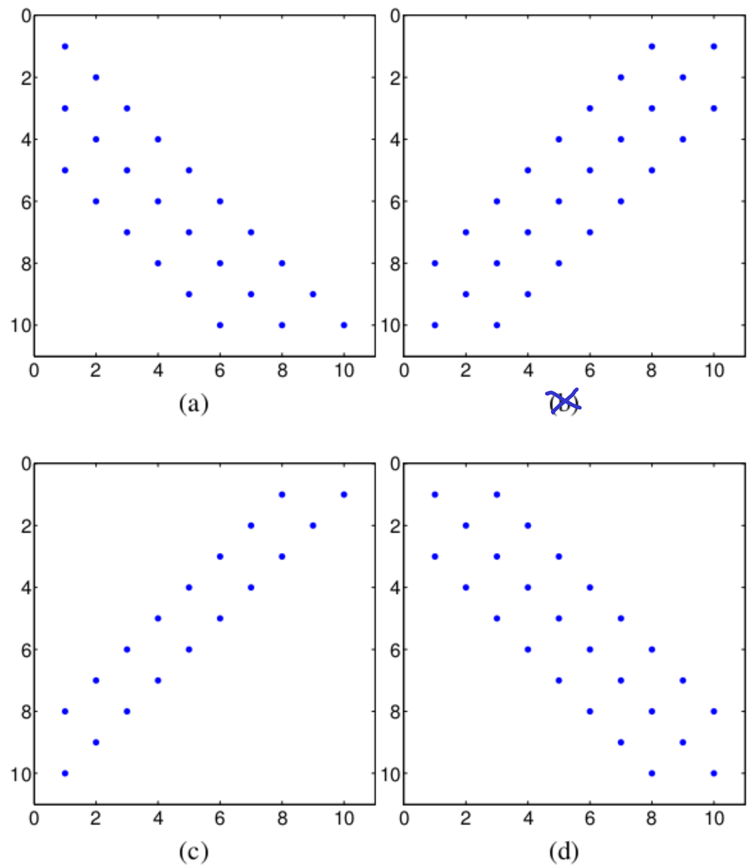


Abbildung 4.2: Aufgabe (4b): Abbildungen zu Listing 4.2

(4c) Vergleichen Sie Listing 4.3 und Abbildung 4.3. (2P)

Listing 4.3: Code zu Teilaufgabe (4c)

```
function [A] = a3_mat(m)
k1 = floor(m/2); k2 = m-k1; % floor() rundet auf naechstkleinere ganze Zahl ab.
I1 = [1:k1];     I2 = [I1+k1+1]; I3 = k2*ones(1,m);
J1 = [1:2:m-1]; J2 = J1+2;       J3 = 1:m;

I = [I1, I2, I3]; J = [J1, J2, J3];
A = sparse(I,J,ones(numel(I),1),m,m);
end
```

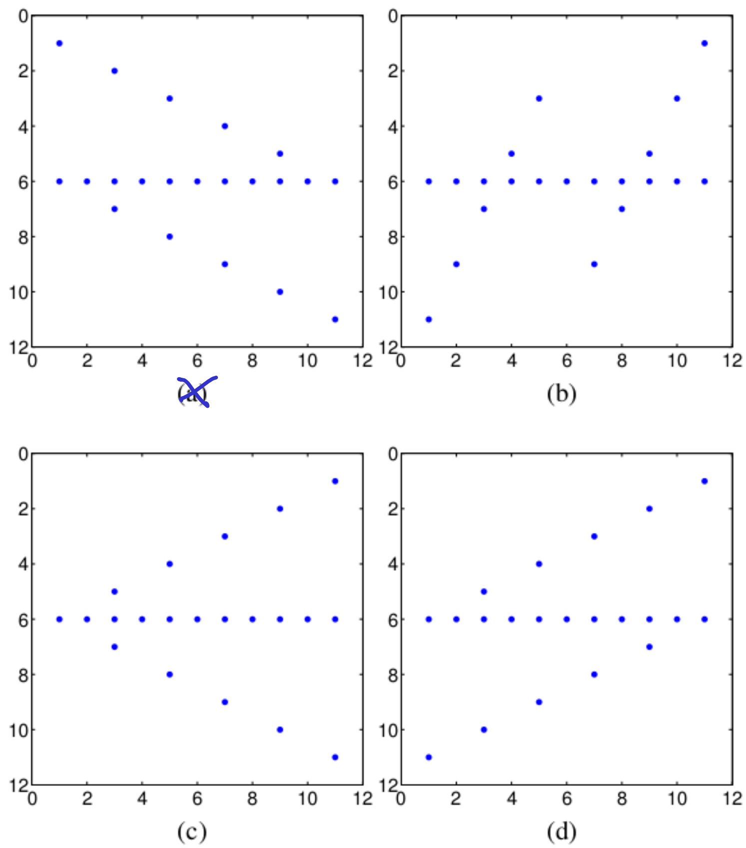


Abbildung 4.3: Aufgabe (4c): Abbildungen zu Listing 4.3