Mathematik I - D-BIOL

Lösung 2

Aufgabe 1

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+(-t)^2} = f(-t),$$

d.h. f ist gerade.

(b) Es ist

$$f(2) = -\frac{2}{7} \qquad \text{sowie} \qquad f(-2) = -\frac{2}{9},$$

d.h. f ist weder gerade noch ungerade.

(c) Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dem Definitionsbereich von f) ist

$$f(t) = \frac{\sin(17t)}{t^2} = -\frac{\sin(17 \cdot (-t))}{(-t)^2} = -f(-t),$$

d.h. f ist ungerade.

(d) Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dem Definitionsbereich von f) ist

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{|t|}} = -\frac{\sin(-t)}{\sqrt{|-t|}} = -f(-t),$$

d.h. f ist ungerade.

(e) Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \mid k \text{ ungerade}\}$ (dem Definitionsbereich von f) ist

$$f(t) = t\tan(t) = \frac{t\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{(-t)\sin(-t)}{\cos(-t)} = f(-t),$$

d.h. f ist gerade.

(f) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) = \cos^a(t)\sin^b(t) = (-1)^b\cos^a(-t)\sin^b(-t) = (-1)^b f(-t),$$

d.h. f ist gerade, falls b gerade ist, und ungerade, falls b ungerade ist.

(g) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) = \cos(t+a) = \cos(t)\cos(a) - \sin(t)\sin(a)$$

sowie

$$f(-t) = \cos(-t+a) = \cos(t)\cos(a) + \sin(t)\sin(a),$$

d.h. f ist gerade genau dann, wenn $\sin(a) = 0$ gilt (also für $a \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$), ungerade genau dann, wenn $\cos(a) = 0$ gilt (also für $a \in \{\frac{k\pi}{2} \mid k \text{ ungerade}\}$), ansonsten weder gerade noch ungerade.

(h) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) = 2^{\cos(t)} = 2^{\cos(-t)} = f(-t),$$

d.h. f ist gerade.

(i) Es ist

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2^{\sin(\frac{\pi}{2})} = 2 \qquad \text{sowie} \qquad f(-\frac{\pi}{2}) = 2^{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2},$$

d.h. f ist weder gerade noch ungerade.

(j) Für alle t ist

$$f(t) = \log_{10} 2^t = t \log_{10} 2 = -(-t)\log_{10} 2 = -f(-t),$$

d.h. f ist ungerade.

Aufgabe 2

(a) Die Funktion f ist gerade, denn es gilt

$$f(t) = \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(-t)^2}{1+(-t)^2} = f(-t)$$

für alle t.

(b) Der Wertebereich von f ist das halboffene Intervall $W = [0,1)$. Da f der Quotient zweier Funktionen mit Wertebereich in $\mathbb{R}_0^+ = \{t \mid t \geq 0\}$ ist (nämlich t^2 und $1+t^2$), ist auch $W \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Andererseits ist aber für alle t die Ungleichung $t^2 < 1+t^2$ erfüllt, d.h. $f(t) < 1$ und folglich $W \subseteq [0,1)$. Dass nun tatsächlich $W = [0,1)$ gilt, folgt aus dem asymptotischen Verhalten von f für $t \to \infty$ (und der Stetigkeit von f), vgl. Teilaufgabe (d).

(c) Sei $t_2 > t_1 > 0$. Dann ist $t_2^2 > t_1^2$ und es folgt

$$f(t_2) - f(t_1) = \frac{t_2^2}{1+t_2^2} - \frac{t_1^2}{1+t_1^2} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)} > 0,$$

also $f(t_2) > f(t_1)$. Die Funktion f ist daher im Bereich $t \geq 0$ monoton steigend. Da f nach Teilaufgabe (a) gerade ist, folgt hieraus, dass die Funktion im Bereich $t \leq 0$ monoton fallend ist [Denn: $f(t_2) - f(t_1) = f(-t_2) - f(-t_1) > 0$ für alle $-t_2 > -t_1 > 0$ bzw. für alle $t_2 < t_1 < 0$].

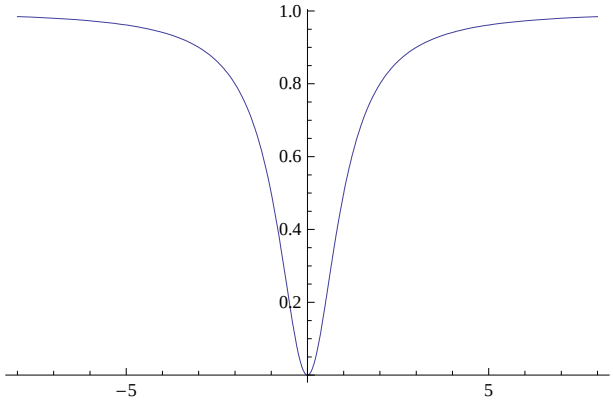
(d) Wir wissen bereits, dass $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} = 0$ gilt. Daraus folgt mit $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{\frac{1}{t^2}+1}$ für $t \neq 0$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{t^2}+1} = 1.$$

Aus der Symmetrie von f erhalten wir hieraus

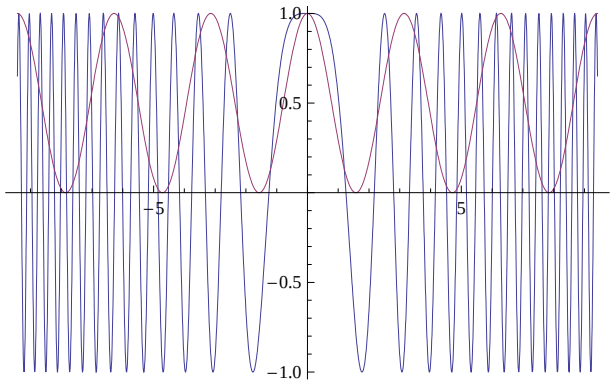
$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} f(-t) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 1.$$

(e)



Aufgabe 3

(a)



(b) Da die Kosinusfunktion den Wertebereich $[-1,1]$ hat erhalten wir für die Wertebereiche von g_1 bzw. g_2 die Intervalle $W_1 = [-1,1]$ bzw. $W_2 = [0,1]$.

(c) Beide Funktionen sind gerade, denn für alle t ist

$$g_1(t) = \cos\left(t^2\right) = \cos\left((-t)^2\right) = g_1(-t) \qquad \text{und} \qquad g_2(t) = \cos^2(t) = \cos^2(-t) = g_2(-t).$$

(d) Die Funktion g_1 ist offenbar nicht periodisch. Die Funktion g_2 hingegen ist periodisch mit (kleinster) Periodenlänge π. Es gilt nämlich für alle t:

$$g_2(t+\pi) = \cos^2(t+\pi) = \big(\cos(t)\cos(\pi) - \sin(t)\sin(\pi)\big)^2 = (-\cos(t))^2 = \cos^2(t) = g_2(t).$$

(e) Die Funktion g_2 ist nach (d) π-periodisch. Ihr Verlauf in Intervallen $[k\pi,(k+1)\pi]$ für grosse Werte von $k \in \mathbb{N}$ ist also nicht anders als der Verlauf im Intervall $[0,\pi]$. Im Gegensatz dazu durchläuft zwar auch die Funktion g_1 alle Werte in ihrem Wertebereich $W_2 = [-1,1]$, jedoch umso schneller, je grösser t wird.