Lösung ZA 3

1.) a) da nach Pythagoras gilt

$$y^2 + y^2 = 2y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

unter Betrachtung des Einheitskreises folgt für

$$\theta = \pi/4 \qquad y = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) aus der Zeichnung ist zu erkennen, dass

$$2 \cdot \sin \pi/6 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \pi/6 = 1/2$$

mit Hilfe der geometrischen Definitionen und mit Pythagoras:

$$\sin^2(\pi/6) + \cos^2(\pi/6) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\pi/6) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

unter Betrachtung des Einheitskreises kann der negative Wert ausgeschlossen werden

c) $\cos \pi/3 = \sin \pi/6$ & $\sin \pi/3 = \cos \pi/6$

folgen unter Betrachtung des Dreiecks in b) und mit Hilfe der geometrischen Definitionen

die übrigen Werte ergeben sich durch Betrachtung des Einheitskreises und unter der Verwendung von $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ZA3, Aufgabe 2)

(a) Bei den angegebenen Näherungen handelt es sich jeweils um das Taylorpolynom ersten Grades an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\sin x \approx P_1^{(\sin x)}(x) = \sin(0) + \frac{d}{dx}\sin x\Big|_{x=0} \cdot x = 0 + \cos(0)\cdot x = x$$

$$\cos x \approx P_1^{(\cos x)}(x) = \cos(0) + \frac{d}{dx}\cos x\Big|_{x=0} \cdot x = 1 + \sin(0)\cdot x = 1$$

$$\tan x \approx P_1^{(\tan(x))}(x) = \tan(0) + \frac{d}{dx}\tan x\Big|_{x=0} \cdot x = 0 + (1+\tan^2(0))\cdot x = x$$

(b) Der maximale Fehler wird bei $x = 0.1$ angenommen und beträgt

$$x^2 = (0.1)^2 = \underline{0.01}$$

(c) Taylor - Polynome 3. Ordnung:

$$\sin(x) \approx \sin(0) + \frac{d}{dx}\sin(x)\Big|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\sin(x)\Big|_{x=0} \cdot x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}\sin(x)\Big|_{x=0} \cdot x^3$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

analog: $\cos(x) \approx \underline{1 - \frac{x^2}{2}}$

$\tan(x) \approx \underline{x + \frac{x^3}{3}}$

(d) Gemäss obiger Näherung gilt: $\cos^2(x) + \sin^2(x) \approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = A(x)$

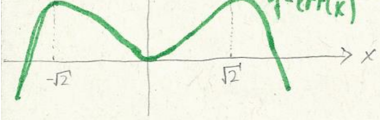
Tatsächlich gilt aber $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

$\Rightarrow$ Der Fehler beträgt $err(x) = 1 - A(x) = 1 - \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}\right]$

$$= \frac{1}{12}\left(x^4 - \frac{x^6}{3}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Untersuche $err(x)$ auf $[0, 0.1]$

$\hookrightarrow$ Kritische Punkte: $err'(x) = \frac{1}{12}(4x^3 - 2x^5) \stackrel{!}{=} 0 \iff x = 0$ oder $4 = 2x^2 \iff x = 0$ oder $x = -\sqrt{2}$ oder $x = \sqrt{2}$



$err''(x) = \frac{1}{12}(12x^2 - 10x^4) \Rightarrow err''(0) = 0,\ err''(\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{12}(24 - 40) < 0$

$err(x)$ ist streng monoton steigend in $[0, 0.1]$

$\Rightarrow$ Max. Fehler bei $x = 0.1$; er beträgt $err(0.1) = 8.3 \cdot 10^{-6}$ und ist damit über 1000 mal kleiner als beim TP 1. Grades (s. (b)).

3.) $x - 0{,}1 \cdot \sin x = 0{,}85 \qquad 0 \le x \le \pi$

a) $f(x) = x - 0{,}1 \cdot \sin x - 0{,}85$

$f(0) = -0{,}85 < 0 \qquad f(\pi) = \pi - 0{,}85 > 0$

deswegen folgt aufgrund des Zwischenwertsatzes, dass es ein $x \in [0, \pi]$ gibt mit $f(x) = 0$

b) $f(x) = x - 0{,}1 \cdot \sin x - 0{,}85 \qquad x_0 = \pi$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{für } f'(x_{n-1}) \neq 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \pi - \frac{(\pi - 0{,}85)}{1{,}1} \approx 1{,}058$$

$f'(x) = 1 - 0{,}1 \cdot \cos x$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0{,}931$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - 0{,}1 \cdot \sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 0{,}1 \cdot \cos x}{2 + \cos x} = \frac{0{,}9}{3} = 0{,}3$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x - 0{,}1 \cdot \sin x}{(x - \pi)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 0{,}1 \cdot \sin x}{e^{\sin x} + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 0{,}1 \cdot \sin x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1\cancel{x}}{x^2} - \frac{0{,}1 \cdot \sin x}{x^2} \right) = 0$$