ML Serie 1

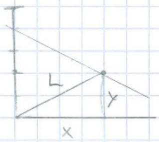
Abschnitt 1.1

2 Neg. Wurzeln nicht definiert → es muss gelten $5x + 10 \geq 0$

→ $x \geq -2$ → $\underline{\underline{D: [-2, \infty)}}$

$\underline{\underline{W: [0, \infty)}}$

8 L = Abstand Pkt zu Ursprung → $L^2 = x^2 + y^2$



$2x + 4y = 5$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{16}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{20x^2 - 20x + 25}}{4}}}$$

33 gerade Funktion: $f(t) = f(-t)$

ungerade Funktion: $f(t) = -f(-t)$

gerade?
$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{-t-1}$$
$$-t-1 = t-1$$
$$t = 0 \rightarrow X$$
weil Beziehung nicht für jeden belieb. Wert von t gilt

ungerade?
$$\frac{1}{t-1} = -\left(\frac{1}{-t-1}\right)$$
$$-t-1 = -(t-1) = -t+1$$
$$-1 = 1 \rightarrow X$$
Beziehung wird von keinem Wert von t erfüllt!

↳ die $\underline{\underline{\text{Fkt ist weder gerade noch ungerade}}}$

41 a) h b) f c) g

warum? b) $y = x^3$ → ungerade Fkt → $f(-x) = -f(-x)$

→ nur Graph f ist ungerade.

a) vs c) $y = x^{10}$ ist zwischen $0 < x < 1$ kleiner als $y = x^4$, nachher nimmt es höhere Werte an als $y = x^4$

↳ Graph h muss zu Fkt $y = x^4$ gehören

Abschnitt 1.2

8 geg: $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$, $j(x) = 2x$

a) $y = \sqrt{x} - 3 \rightarrow f(g(x)) = (\sqrt{x}) - 3$

b) $y = 2 \cdot \sqrt{x} \rightarrow j(g(x)) = 2 \cdot (\sqrt{x})$

c) $y = x^{1/4} \rightarrow g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = (x^{1/2})^{1/2} = x^{1/4}$

d) $y = 4x \rightarrow j(j(x)) = 2 \cdot (2x) = 4x$

e) $y = \sqrt{(x-3)^3} \rightarrow g(h(f(x))) = \sqrt{(x-3)^3}$

f) $y = (2x-6)^3 \rightarrow h(j(f(x))) = (2(x-3))^3 = (2x-6)^3$

16 $y = (x + a)^2 + b$

$\hookrightarrow$ falls $b > 0$: Verschiebung Graph nach oben
falls $b < 0$: " " " unten

$\hookrightarrow$ falls $a > 0$: Verschiebung Graph nach links
falls $a < 0$: " " " rechts

a) 4 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

33 $y = a \cdot f(bx + c) + d$

$\hookrightarrow$ Verschiebung Graph in y-Richtung:
$d > 0 \rightarrow \uparrow$
$d < 0 \rightarrow \downarrow$

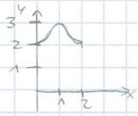
$\rightarrow$ Verschiebung Graph in x-Richtung:
$c > 0 \rightarrow$ nach links
$c < 0 \rightarrow$ nach rechts

$\rightarrow$ $b = -1 \rightarrow$ Spiegelung Graph an y-Achse

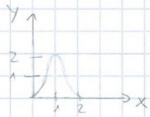
$\rightarrow$ $|a| < 1 \rightarrow$ Stauchung Graph
$|a| > 1 \rightarrow$ Streckung Graph

$a < 0 \rightarrow$ Spiegelung Graph an x-Achse

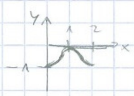
a) D: $[0,2]$
W: $[2,3]$



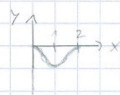
c) D: $[0,2]$
W: $[0,2]$



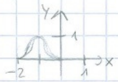
b) D: $[0,2]$
W: $[-1,0]$



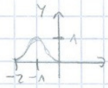
d) D: $[0,2]$
W: $[-1,0]$



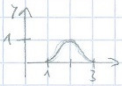
e) D: $[-2, 0]$
W: $[0, 1]$



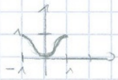
g) D: $[-2, 0]$
W: $[0, 1]$



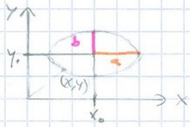
f) D: $[1, 3]$
W: $[0, 1]$



h) D: $[-1, 1]$
W: $[0, 1]$



46 allg Ellipsenform: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

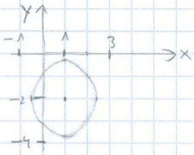


geg $3(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 6 \quad | :6$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

$\Rightarrow x_0 = 1 \qquad y_0 = -2$

$a = \sqrt{2} \qquad b = \sqrt{3}$



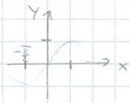
Abschnitt 1.3

1 $r = 10\,m \qquad s = ? \qquad s = r \cdot \theta$ (in Radiant)

a) $\theta = \frac{4}{5}\pi$ Radiant $\rightarrow s = r \cdot \theta = 10\,m \cdot \frac{4}{5}\pi = \underline{\underline{8\pi\,m}}$

b) $\theta = \frac{\pi}{180} \cdot 110° = \frac{11}{18}\pi \rightarrow s = r \cdot \theta = 10\,m \cdot \frac{11}{18}\pi = \underline{\underline{\frac{55}{9}\pi\,m}}$

5 $\cos(x) = \frac{1}{3} \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$



$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

$\sin(x) = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} \rightarrow$ bin in Intervall $[-\frac{\pi}{2}, 0] \Rightarrow \sin(x) < 0$

$\Rightarrow \sin(x) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{8}}{3}}}$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{-\sqrt{8}}}$

8 $f(x) = a \cdot (bx + c)$

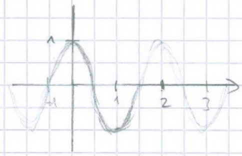
c: Phasenverschiebung

b: bestimmt Periode : $T = \frac{2\pi}{b}$

a: bestimmt Amplitude

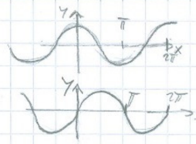
$\rightarrow \cos(\pi x) \rightarrow$ Periode $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, $a = 1$, $c = 0$

$\rightarrow$



20/21 $\cos(x)$: gerade Fkt : $\cos(x) = \cos(-x)$

$\sin(x)$: ungerade Fkt : $\sin(x) = -\sin(-x)$



20 geg: Additionstheorem: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

$$\rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta)$$

$$\overset{\text{gerade/ungerade Fkt}}{=} \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot(-\sin(\beta))$$

$$= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \qquad \text{q.e.d}$$

21 geg: Additionstheorem: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

$$\rightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin(\alpha)\cdot\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(-\beta)$$

$$\overset{\text{gerade/ungerade Fkt}}{=} \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)(-\sin(\beta))$$

$$= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \qquad \text{q.e.d.}$$

22 $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ mit $\beta = \alpha$

$$\cos(\alpha-\alpha) = \cos(0) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

$$1 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$$ $\hat{=}$ trigonometrischer Pythagoras

Abschnitt 2.2

3

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

Es gibt keine eindeutige Zahl L, gegen die alle Funktionswerte für $x \to 0$ gehen

4

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Es gibt keine eindeutige Zahl L, gegen die alle Funktionswerte für $x \to 1$ gehen

Abschnitt 2.4

2

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & x<2 \\ \frac{x}{2}+1 & x>2 \end{cases}$$

a) $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{2}+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3-x = \underline{\underline{1}}$$

b) $\underline{\underline{\text{nein}}}$ $\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert nicht, weil $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

→ es gibt keine eindeutige Zahl L, gegen die alle Funktionswerte für $x \to 2$ gehen.

c) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x}{2} + 1 = \underline{\underline{3}}$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x}{2} + 1 = \underline{\underline{3}}$

d) Ja, der Grenzwert existiert: $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \underline{\underline{3}}$

3 $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & x > 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin(\frac{1}{x})$ existiert nicht, da die Fkt immer oszilliert.
($\to$ kein eindeutiger Wert)

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = \underline{\underline{0}}$ $\to$ ja, der Grenzwert existiert

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht, denn wenn nicht beide einseitigen Extremwerte existieren, kann auch der zweiseitige Extremwert nicht existieren ($\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ist nicht erfüllt)

Abschnitt 2.5

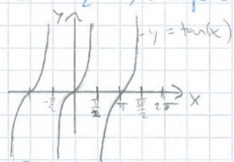
16 $f(x)$ ist stetig an x_0 falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h wenn die Funktion keine Sprünge macht & sie keine Definitionslücken aufweist

$y = \frac{x \cdot \tan(x)}{x^2+1}$

↳ damit stetig: $- x^2 + 1 \neq 0 \to x^2 \neq -1 \to$ gilt für alle x

$- x \neq \frac{n\cdot\pi}{2}$, n ungerade

↳ denn $\tan(x)$ ist für $x = \frac{n\cdot\pi}{2}$, n ungerade nicht definiert (Polstelle)



↳ Die Fkt ist stetig für alle x ausser $\frac{n\cdot\pi}{2}$, wobei n eine ungerade Zahl ist.

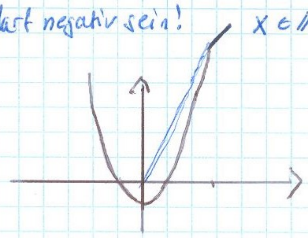
MuLö Serie 1
Teil II

2.5

#17 $\sqrt{2x+3}$ → Wurzel nicht negativ → $\underline{\underline{x \geq -3/2}}$

#18 $(2x-1)^{1/3}$ dritte Wurzel darf negativ sein! $x \in \mathbb{R}$

#25 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 3 \\ 2ax & x \geq 3 \end{cases}$



$\rightarrow 3^2 - 1 = 8 \overset{!}{=} 2a \cdot 3$

$\Rightarrow 8/6 = a$

$\underline{\underline{4/3 = a}}$

2.6

#3 $g(x) = \frac{1}{2 + 1/x}$ $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \frac{1}{2 + \text{"}1/\infty\text{"}} = \underline{\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{1}{2 - \text{"}1/\infty\text{"}} = \underline{\frac{1}{2}}$

#5 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin(2x)}{x} = 0$ → $\sin(2x)$ oszilliert → wenn $x \to \infty$ ist das nicht wichtig

$\frac{1}{x}$ wird immer kleiner am Schluss Multiplikation mit 0.

#9 $\frac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x} = \frac{7}{1 - 3/x + 6/x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{7}{1 - \text{"}3/\infty\text{"} + \text{"}6/\infty\text{"}} = \underline{7}$

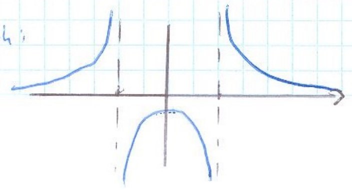
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7}{1 + \text{"}3/\infty\text{"} - \text{"}\frac{6}{\infty^2}\text{"}} = \underline{7}$

#20 $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2}$ → $\lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) < 0$ → $\underline{-\infty}$

#29 $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow (2^+)^2 > 4 \Rightarrow +\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow (2^-)^2 > 4 \rightarrow \infty$

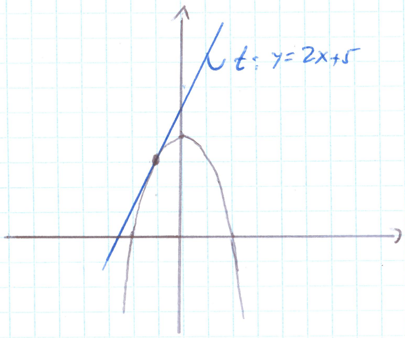
$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow (2^-)^2 < 4 \Rightarrow -\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow (2^+)^2 < 4 \rightarrow -\infty$

oder graphisch:



3.1

#3



$$\cancel{(4+1-2h)} \qquad \frac{(4-(-1+h)^2)-3}{h} = \frac{4-(1-2h+h^2)-3}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(2-h)}{\cancel{h}} = 2-h \rightarrow \lim_{h\to 0} 2-h = \underline{\underline{2}} = m$$

$t: \; y = mx + q$

Im Punkt $(-1,3)$ $\quad 3 = 2\cdot(-1) + q \Rightarrow q = 5 \Rightarrow \underline{\underline{t: \; y = 2x+5}}$

#12 $\quad \sqrt{x}$ an $(4,2)$

$$\frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h\cdot(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{4+h}+2)} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} = m$$

$t: \; y = mx + q$

Im punkt $(4,2)$ $\rightarrow \quad 2 = \frac{1}{4}\cdot 4 + q \Rightarrow q = 1 \quad t: \; \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + 1}}$

#20 Objekt wird gradlinig beschleunigt

$a = 9.81\ m/s^2$

→ Es beschleunigt pro Sekunde um $9.81\ m/s$

→ $v(2s) = 2s \cdot 9.81\ m/s^2 = \underline{\underline{19.6\ m/s}}$

3.2 #6 $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}} = (q+1)^{-1/2}$

$$\rightarrow \frac{(q+1+h)^{-1/2} - (q+1)^{1/2}}{h} = \frac{\left((q+1+h)^{-1/2} - (q+1)^{-1/2}\right)\left((q+1+h)^{1/2} + (q+1)^{-1/2}\right)}{h\left((q+1+h)^{-1/2} + (q+1)^{-1/2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{(q+1+h)^{-1} - (q+1)^{-1}}{h\left((q+1+h)^{-1/2} + (q+1)^{-1/2}\right)} = \frac{\frac{\cancel{q}+\cancel{1}-\cancel{q}-1-\cancel{h}}{(q+1+h)(q+1)}}{\cancel{h}\left((q+1+h)^{-1/2} + (q+1)^{-1/2}\right)} =$$

$$\frac{\frac{-1}{(q+1+h)(q+1)}}{\frac{1}{\sqrt{q+h+1}} + \frac{1}{\sqrt{q+1}}} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \Rightarrow \frac{\frac{-1}{(q+1)^2}}{2/(q+1)^{1/2}} = -\frac{(q+1)^{1/2}}{2(q+1)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(q+1)^{-3/2}}}$$

#28

a.) ist differenzierbar auf $x \in D \setminus \{0\}$

b.) $\{\}$

c.) $X = 0$

3.3

#5 $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$ Mit Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$\underline{\underline{y' = 12x - 10 + 10x^{-3}}}$$

$$\underline{\underline{y' = 12 - 30x^{-4}}}$$

#16 $(x-1)(x^2+3x-5) = x^3 + 2x^2 - 8x + 5 = y$

$$\underline{\underline{y' = 3x^2 + 4x - 8}}$$

$$\underline{\underline{y'' = 6x + 4}}$$

$$\underline{\underline{y''' = 6}}$$

$$\underline{\underline{y^{(iv \dots n)} = 0}}$$

#27 $f(x) = 3x^2 - 4x$ gesucht Tangenten parallel zu $y = 2x + 3$

Geraden sind dann parallel wenn $m_1 = m_2$

$t: y = mx + q$ $m = 2$, da parallel zu $y = 2x + 3$

gesucht x_0 $f'(x_0) = 2$

$f'(x) = 6x - 4 \rightarrow 6x - 4 = 2$

$\underline{x_0 = 1} \rightarrow \underline{y_0 = -1}$

Tangente geht durch $P(1|-1)$: $-1 = 2 \cdot 1 + q \Rightarrow \underline{q = -3}$

$t: y = 2x - 3$

3.3

27

$f(x) = 3x^2 - 4x$ Gesucht Punkte die Tangenten haben parallel zu $y = 8x + 5 \Rightarrow m = 8$

- Geraden parallel wenn $m_1 = m_2$

Gesucht x_0 so dass $f'(x_0) = 8$

$$6x - 4 \overset{!}{=} 8$$

$$\Rightarrow 6x = 12$$

$$\underline{\underline{x_0 = 2}} \rightarrow f(x_0) = \underline{\underline{y_0 = 4}}$$

Nur 1 Pkt: $P_0(x_0 | y_0) \Rightarrow \underline{\underline{P_0(2|4)}}$

28

wie oben! $\rightarrow$ senkrechte Geraden : $m_1 \cdot m_2 = -1$

$f(x) = \frac{x}{x-2} = x \cdot (x-2)^{-1}$ $y = 2x + 3 \rightarrow m = 2$

$$f'(x) = -x(x-2)^{-2} + (x-2)^{-1}$$

$$= \frac{\cancel{1} - x}{(x-2)^{+2}} + \frac{1}{x-2} = \frac{x-2 \; - x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} \overset{!}{=} -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{x_{01} = 0 \quad y_{01} = 0}}$$

$$\underline{\underline{x_{02} = 4 \quad y_{02} = 2}}$$

3.4

#1 $s(t) = t^2 - 3t + 2 \qquad 0 \le t \le 2$

a.)

$s(0) = 2$

$s(2) = 0$ $\rightarrow$ $s_{\text{intervall}} = -s(0) + s(2) = \underline{\underline{-2}}$

$v(t) = 2t - 3 \qquad \frac{v(2) - v(0)}{2} = \underline{\underline{-1}}$

b.) $a(t) = 2 \qquad a(0) = 2$

$a(2) = 2$

c.) $v(t) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow 2t - 3 \stackrel{!}{=} 0$

$\underline{\underline{t = 3/2\ s}}$

#13 $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$

$c(100) = 2000 + 100 \cdot 100 - 0.1 (100)^2 = 11'000$

$\frac{c(100)}{n} = \frac{11'000}{100} = \underline{\underline{110\,€}}$

Grenzkosten: $\frac{dc}{dx} = 100 - 0.2x \qquad c'(100) = 100 - 20 = \underline{\underline{80\,€}}$