Musterlösung Serie 2 Abschnitte 3.6 / 3.7 / 3.9 / 10.8

A3.6/2

Sei $y(u) = \sin(u)$, $u(x) = 3x+1$ Berechne $\frac{dy}{dx}$.

Lsg.: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} =$ | mit $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+1) = 3$

$= 3 \cdot \cos(u) \underset{\substack{\uparrow \\ u=3x+1}}{=}$ | und $\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\sin(u)) = \cos(u)$

$= 3\cos(3x+1)$

A3.6/14

$$y(x) = \underbrace{\frac{1}{21}(3x-2)^7}_{=:W} + \underbrace{\left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}}_{=:V}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(W) + \frac{d}{dx}(V)$$

Teil W: $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{21}(3x-2)^7\right] = \frac{1}{21} \cdot \overset{\text{innere Ableitung}}{3} \cdot \underbrace{7(3x-2)^6}_{\text{äussere Ableitung}} = (3x-2)^6$

Teil V: $\frac{d}{dx}\left[\left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{8x^2}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{8x^2-1}{2x^2}\right)^{-1} = \ldots$

$\ldots = \frac{d}{dx}\left(\frac{\overset{=:u}{2x^2}}{\underset{=:v}{8x^2-1}}\right) = \frac{\overset{u'}{4x}(8x^2-1) - 2x^2 \cdot \overset{v'}{16x}}{\underbrace{(8x^2-1)^2}_{v^2}} = \frac{32x^3 - 4x - 32x^3}{(8x^2-1)^2} = \ldots$

$\ldots = \frac{-4x}{(8x^2-1)^2}$

mit $u' = 4x$

$v' = 16x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x-2)^6 + \frac{-4x}{(8x^2-1)^2}$$

A3.6/30

$$y' = \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = \frac{d}{dx}\left(1 + x^{-1}\right)^3 = \overbrace{(-1 \cdot x^{-2})}^{\text{innere A.}} \cdot \overbrace{3\left(1 + x^{-1}\right)^2}^{\text{äussere A.}} = \frac{-3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{x^2}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[\frac{\overset{=:u}{-3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}}{\underset{=:v}{x^2}}\right] = \frac{6x^{-2}\left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - \left(-3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot 2x\right)}{x^4} = \frac{6\left(1+\frac{1}{x}\right) + 6x\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{x^4}$$

$u' = (-1 \cdot x^{-2}) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{6\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

$v' = 2x$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$= \frac{6\left(1 + \frac{1}{x} + x + 2 + \frac{1}{x}\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{6\left(3 + \frac{2}{x} + x\right)}{x^4} = \frac{6(x^2 + 3x + 2)}{x^5} =$$

$$\frac{6(x+1)(x+2)}{x^5}$$

A3.6/40

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\right] = \frac{2(x-1)(x+1)^2 - (x-1)^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x-1)(x^2+2x+1) - (x^2-2x+1)2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^3+2x^2-2x-2-(2x^3-2x^2-2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{4x^2 - 4}{(x+1)^4} = \frac{4(x^2-1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{4(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow y'(x=0) = \frac{4(0-1)}{(0+1)^3} = \frac{-4}{1^3} = -4 \hat{=} m$$

Punkt $P(0/1)$ liegt auf Funktion

$$y = -4x + b \quad \Rightarrow 1 = -4 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T(x) = 1 - 4x}}$$

A3.7/2

<u>Gegeben:</u> $2x\,y(x) + y(x)^2 = x + y(x)$

<u>Linke Seite:</u> $\frac{d}{dx}\left(2x\,y(x) + y(x)^2\right) = 2y(x) + 2xy'(x) + y'(x) \cdot 2y(x)$

<u>Rechte Seite:</u> $\frac{d}{dx}\left(x + y(x)\right) = 1 + y'(x)$

$\Rightarrow$ Gleichsetzen $\Rightarrow$ $2y(x) + 2xy'(x) + y'(x) \cdot 2y(x) = 1 + y'(x)$

$$\Rightarrow 2x\,y'(x) + 2y(x)\,y'(x) - y'(x) = 1 - 2y(x)$$

$$\Rightarrow y'(x)\left[2x + 2y(x) - 1\right] = 1 - 2y(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y'(x) = \frac{1-2y(x)}{[2x + 2y(x) - 1]}}}$$

A3.7/20

a) Zeige dass $P(1/0)$ auf $y = 2\sin(\pi x - y)$ liegt

$\Rightarrow$ Einsetzen: $0 = 2\sin(\pi \cdot 1 - 0) = 0$ ✓

b) $y(x) = 2\sin(\pi x - y(x))$ $\Rightarrow$ beide Seiten nach x Ableiten

$$\Rightarrow y'(x) = (\pi - y'(x)) \cdot 2 \cdot \cos(\pi x - y(x)) = 2\pi\cos(\pi x - y(x)) - 2y'(x)\cos(\pi x - y(x))$$

$$\Rightarrow y'(x) + 2y'(x)\cos(\pi x - y(x)) = 2\pi\cos(\pi x - y(x))$$

$$y'(x)\left(1 + 2\cos(\pi x - y(x))\right) = 2\pi\cos(\pi x - y(x))$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{2\pi\cos(\pi x - y(x))}{1 + 2\cos(\pi x - y(x))}$$

Steigung an $P(1/0)$ $\Rightarrow$ P einsetzen $\Rightarrow$ $y' = \frac{2\pi\cos(\pi \cdot 1 - 0)}{1 + 2\cos(\pi \cdot 1 - 0)} = \frac{2\pi(-1)}{1 + 2 \cdot (-1)} = 2\pi$

$\Rightarrow$ Tangente hat Form $y = 2\pi x + b$

$\Rightarrow$ durch Punkt $P(1/0)$: $-2\pi = b$ $\Rightarrow$ $\underline{T(x) = 2\pi x - 2\pi}$

A3.7/22

x-Achse schneidet $\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x_1 = +\sqrt{7},\ x_2 = -\sqrt{7}$

Für Steigung: $x^2 + x\,y(x) + y(x)^2 = 7$ beide Seiten nach x ableiten

$\Rightarrow 2x + y(x) + x\,y'(x) + y'(x)\cdot 2y(x) = 0$

$\Rightarrow y'(x)\,(x + 2y(x)) = -2x - y(x)$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-2x - y(x)}{x + 2y(x)}$$

Falls $x_1 = \sqrt{7} \Rightarrow 7 + \sqrt{7}\,y + y^2 = 7 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow \underline{P_1(\sqrt{7}\,|\,0)}$

$x_2 = -\sqrt{7} \Rightarrow 7 - \sqrt{7}\,y + y^2 = 7 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow \underline{P_2(-\sqrt{7}\,|\,0)}$

$\underline{P_1}: \ y' = \frac{-2\sqrt{7} - 0}{\sqrt{7}} = \underline{\underline{-2}}$

$\underline{P_2}: \ y' = \frac{(-2)(-\sqrt{7})}{(-\sqrt{7})} = \underline{\underline{-2}}$

✓

A3.9/10

$(1+x)^k \approx 1 + kx$ als gute Näherung wenn x sehr klein

a) $(1.0002)^{50} = (1 + 0.0002)^{50} \approx 1 + 50 \cdot 0.0002 = \underline{\underline{1.01}}$

b) $(1.009)^{1/3} = (1 + 0.009)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot 0.009 = \underline{\underline{1.003}}$

A10.8/3

$f(x) = 1/x,\ a = 2,\ n = 3$

$$T_3 f(x,2) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k = \frac{f^{(0)}(2)}{0!}(x-2)^0 + \frac{f^{(1)}(2)}{1!}(x-2)^1 + \dots + \frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3$$

mit $f^{(0)}(2) = \frac{1}{2}$, $f^{(1)}(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$, $f^{(2)}(2) = 2\frac{1}{2^3} = \frac{1}{4}$, $f^{(3)}(2) = -6\frac{1}{2^4} = -\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow T_3 f(x,2) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{0. ten Ordnung}} \overbrace{- \frac{1}{4}(x-2)}^{\text{1. Ordnung}} + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$$

zweiten Ordnung

dritten Ordnung

A10.8/9

$f(x) = \sin(3x),\ a = 0 \Rightarrow f^{(0)}(0) = \sin(3\cdot 0) = 0$ ⇒ gerade Terme verschwinden

$f^{(1)}(0) = 3\cos(3\cdot 0) = 3$ $\cdot 9$

$f^{(2)}(0) = -9\,\sin(3\cdot 0) = 0$

$f^{(3)}(0) = -27\cos(3\cdot 0) = -27$

$f^{(4)}(0) = 81\sin(3\cdot 0) = 0$

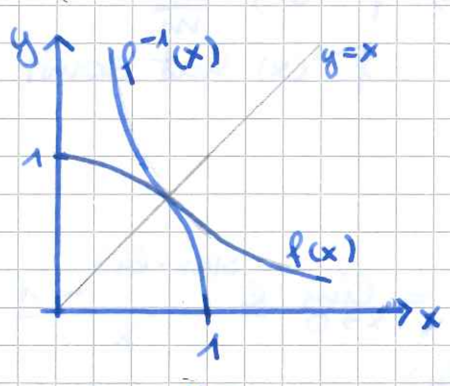
$$\Rightarrow f(x) = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + \frac{243}{5!}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2n+1 weil nur ungerade Werte

$(-1)^n$ für Vorzeichenwechsel

Abschnitt 7. 1.

11.)

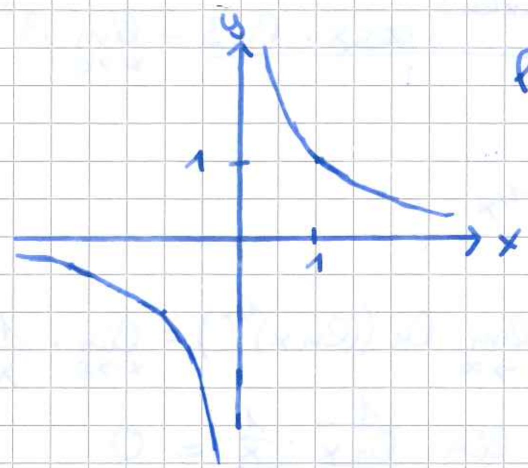


$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ $\quad x \geq 0$

$f^{-1}(x)$: $\quad D=[0,1]$

$W=[0,\infty)$

18.) a)



$f(x)=\frac{1}{x}$

symmetrisch zum Nullpunkt (Punktsymmetrie)

b) $\quad y=\frac{1}{x} \rightsquigarrow x=\frac{1}{y}$

vertausche jedes ~~x~~ x & y

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

23.) $\quad f(x)=(x+1)^2 \quad , x \geq -1$

$y=(x+1)^2$

$\sqrt{y}=x+1$

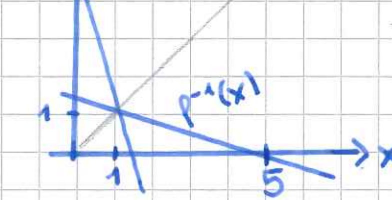
$\Rightarrow x=\sqrt{y}-1$

vertauschen von x & y $\Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$

37.) $\quad f(x)=5-4x \qquad a=1/2$

a) $\quad y=5-4x \Rightarrow x=\frac{5}{4}-\frac{y}{4} \quad \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5}{4}-\frac{x}{4}$

b)



c) $\quad \frac{df}{dx}=-4 \qquad \frac{df^{-1}}{dx}(a)=\frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(a))}=-\frac{1}{4}$

45.) $y = mx \quad , m \neq 0$

$\Rightarrow x = \frac{y}{m} \quad \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{m}$

$f^{-1}(x)$ hat somit Steigung $\frac{1}{m}$

Abschnitt 7.5.

14.) $\lim_{x \to 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x \cdot \ln 3} - 1}{x} =$

$\underset{\text{l'hospital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x \ln 3} \cdot \cos x \cdot \ln 3}{1} = \lim_{x \to 0} 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 3 = \ln 3$

27.) $\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{1/x}$

berechne zuerst $\lim_{x \to \infty} \ln((\ln x)^{1/x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) =$

$\underset{\text{l'hospital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$

$\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} e^{\ln((\ln x)^{1/x})} = e^0 = 1$

39.) d) ist richtig

nur hier wurde der Grenzwert richtig, mit Hilfe von l' Hospital berechnet