D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 14
Dr. Ana Cannas

Serie 3: Anwendungen der Ableitungen

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 3 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 13./15. Oktober.
- Die folgenden Aufgaben stammen aus dem Buch "G. B. Thomas, M. D. Weir und J. Hass, Analysis 1 Lehr- und Übungsbuch".
- Die fettgedruckten Aufgaben werden in den Übungsgruppen vorzugsweise besprochen.

<u>Abschnitt 4.1</u> 1, 3, 5, 7, 11, 12, 13, 14, 19, 23, **24**, 25, 32, 33, 35, **38**, 39, **42**, 43, 44

<u>Abschnitt 4.2</u> **12**, 16

<u>Abschnitt 4.3</u> 2, **3**, **4**, 6, 8, 10, 13, 18, **19**, 21

<u>Abschnitt 4.4</u> 1, **2**, 3, 5, 13, 16, **28**, 29, 40, **41**, 46, **51**, **53**, **55**

<u>Abschnitt 4.5</u> 1, **5**, 21, 33

<u>Abschnitt 4.6</u> 1, **2**, 8

<u>Abschnitt 4.7</u> 1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, 15, **24**, 30, 31, 34, 36, **37**, 54

Musterlösung: Serie 3

Abschnitt 4.1

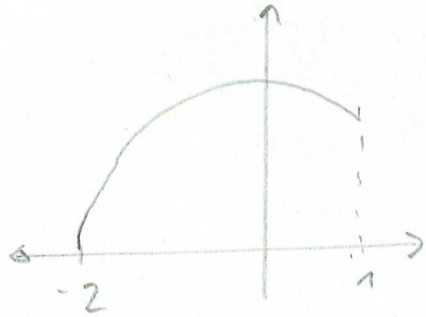
24) $f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad -2 \leq x \leq 1$

1. Bestimmung von kritischen Punkten $f'(x) = 0$ oder undef.

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \; (\overset{!}{=} 0) \quad \Rightarrow x = 0$$

undef $\Rightarrow x = \pm 2$

2. Auswerten Extremalstelle + Rand



$\Rightarrow f(-2) = 0$

$f(1) = \sqrt{3}$

$f(0) = 2 \quad \Leftarrow$ globales Maximum

---

38) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1 Definitionsbereich: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1, x \geq 1\}$

2 Kritische Punkte

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \; (\overset{!}{=} 0) \quad \Rightarrow x = 0 \leftarrow$$ nicht in Def

undef $\Rightarrow x = \pm 1$

3. Auswerten

$f(-1) = 0 = f(1) \quad \Leftarrow$ globales Minimum

$f(-\infty) = \infty = f(\infty)$

42) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

1. Definitionsbereich: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

2. Kritische Punkte:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \quad (\stackrel{!}{=} 0)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

undef: $f'(x) = \dfrac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

3. Auswerten

$f(-2) = 0$ lokal $\qquad f(\sqrt{2}) = 2$ global

$f(2) = 0$ lokal $\qquad f(-\sqrt{2}) = -2$ global

Abschnitt 4.2

12) $f(x) = x^4 + 3x + 1 \quad [-2, -1]$

Mittelwertsatz: Es gibt nur eine Nullstelle, da

$f(-2) = 11$

$f(-1) = -1$

$f'(x) = 4x^3 + 3 < 0 \quad [-2, -1]$

Musterlösung: Serie 3

Abschnitt 4.3

3) $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

a) $x = 1,\ x = -2,\ x = 3$

b) wachsend $f' > 0$ $\quad (3,\infty)$ & $(-2,1)$

fallend: $f' < 0$ $\quad (1,3)$ & $(-2,-\infty)$

c) Bewertung von Extremalstellen

$f' = 0$ & $f'' < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f' = 0$ & $f'' > 0 \Rightarrow$ Minimum

$\Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 4x - 5$

$f(1) = -6 \leftarrow$ l. Max

$f(-2) = 15 \leftarrow$ l. Min

$f(3) = 10 \leftarrow$ l. Min

---

4) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x+2}$

a) $x = 0\ ;\ x = 1$

b) wachsend: $f' > 0$ $\quad (1,\infty)$ & $(-2,-\infty)$

fallend: $f' < 0$ $\quad (-2,1)$

c) $f''(x) = \dfrac{x(2x^2+5x-4)}{(x+2)^2}$

$f''(0) = 0$

$f''(1) = 1/3 \leftarrow$ l. Min

19) $f(x) = x \cdot \sqrt{8-x^2}$ Def: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}\}$.

a) $f'(x) = \sqrt{8-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{8-x^2}}$

$f' > 0$: $(-2, 2)$

$f' < 0$: $(-\sqrt{8}, -2)$ & $(2, \sqrt{8})$

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow 8 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$

Auswerten

$f(-\sqrt{8}) = 0$

$f(\sqrt{8}) = 0$

$f(-2) = -4 \leftarrow$ gl. Min

$f(2) = 4 \leftarrow$ gl. Max

Abschnitt 4.4

2) a) konkav, konvex über f''

$f''(x) = 3x^2 - 4$

konkav: $f'' < 0$ $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

konvex: $f'' > 0$ $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ & $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

b) Extremalstellen

$f'(x) = x^3 - 4x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$

Auswertung an f''

$f''(0) = -4 \leftarrow$ lok. Max

$f''(-2) = 8 \leftarrow$ lok. Min

$f''(2) = 8 \leftarrow$ " "

Musterlösung: Serie 3

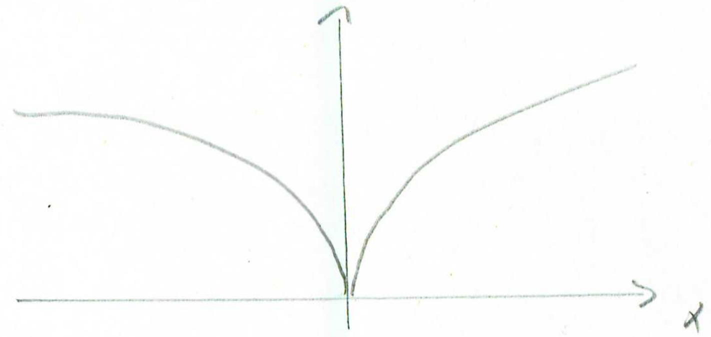
Abschnitt 4.4

b) Wendestelle: $f''(x) = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

---

28)

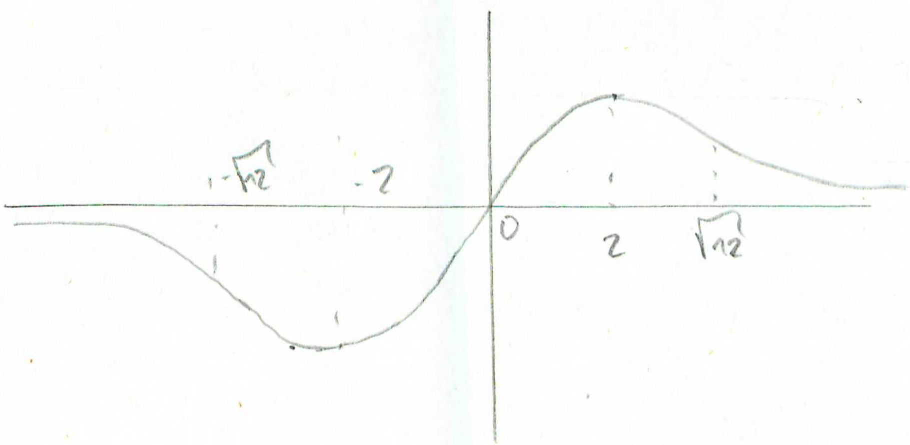


---

26) $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$

1. Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Extremalstelle: $f'(x) = \dfrac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm 2$
3. Wendepunkte: $f''(x) = \dfrac{16x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \Rightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{12}$
4. Randverhalten

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$



41) Beiblatt

---

51) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ Def: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$

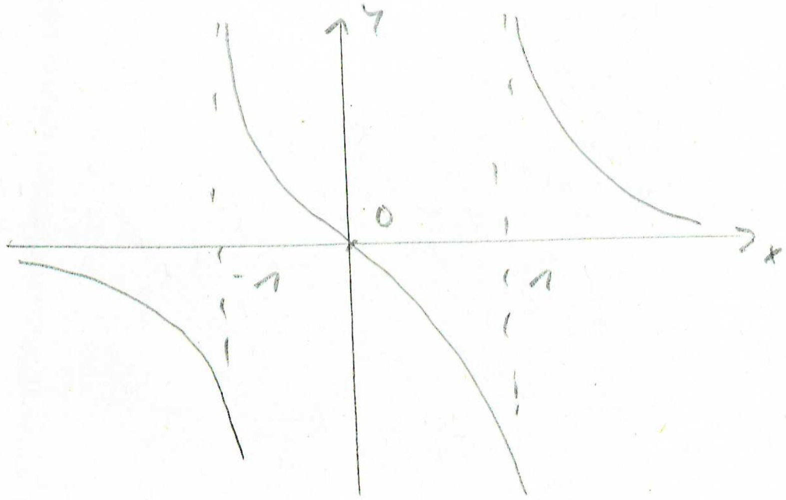
1. Nullstellen $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Extremalstellen: $f'(x) = \dfrac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftarrow$ keine
3. Wendepunkte: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = 0$

4. Randverhalten

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty = \lim_{x \to 1^+} f(x)$



---

53)

P: $f' < 0$; $f'' > 0$

Q: $f' > 0$; $f'' = 0$

R: $f' > 0$; $f'' < 0$

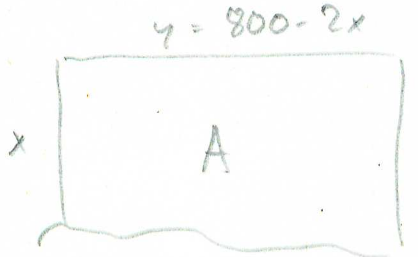
S: $f' = 0$; $f'' < 0$

T: $f' < 0$; $f'' < 0$

Musterlösung: Serie 3

Abschnitt 4.5

5)



$$\Rightarrow A = x \cdot y = x \cdot (800 - 2x)$$

Maximieren: $\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \Rightarrow 800 - 4x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 200}}$

$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -4 \Rightarrow$ Maximum

Abschnitt 4.6

2) $f(x) = x^4 + x - 3$

Newtonverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$= x_n - \frac{x_n^4 + x_n - 3}{4x_n^3 + 1}$$

$\vdots$

Abschnitt 4.7

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

5) a) $\int \frac{2}{3} x^{-1/3} \, dx = x^{2/3}$

b) $\int \frac{1}{3} x^{-2/3} \, dx = x^{1/3}$

c) $\int -\frac{1}{3} x^{-4/3} \, dx = x^{-1/3}$

---

24) $\int \frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cos(4x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin(4x)$

37) $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}$ $\quad y(-1) = -5$

$\Rightarrow dy = 3x^{-2/3}\,dx \quad | \int$

$\int dy = \int 3x^{-2/3}\,dx$

$y = 9x^{1/3} + C$

Anfangsbedingung einsetzen

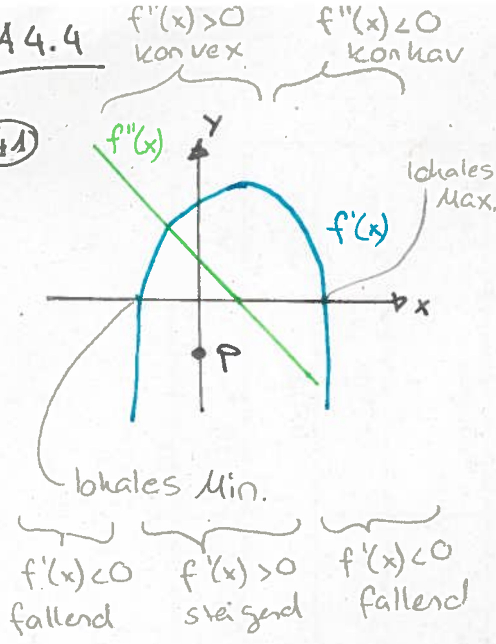
$\Rightarrow y(-1) = -5 = 9(-1)^{1/3} + C = -9 + C$

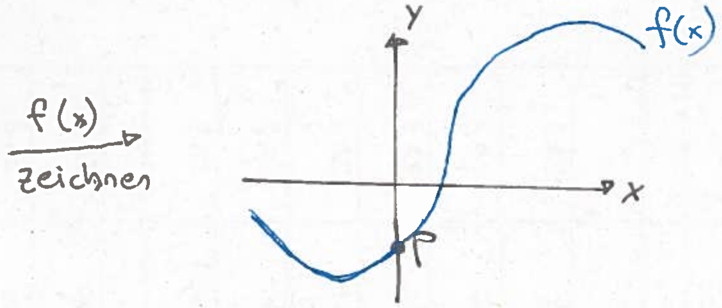
$\Rightarrow C = 4$

$\Rightarrow y = 9x^{1/3} + 4$

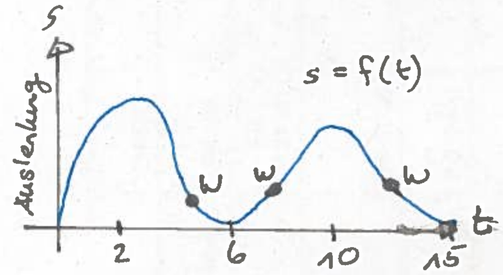
A 4.4

(41)





(55)



a. Der Körper bewegt sich vom Ursprung weg, wenn $v(t) = f'(t) > 0$, also wenn die Funktion s steigt.
Er bewegt sich auf den Ursprung zu, wenn $v(t) = f'(t) < 0$, also wenn die Funktion s fällt.

b. Die Geschw. ist null in den lokalen Max./Min.
→ bei $t = 2, t = 6, t = 10$

c. Die Beschleunigung ist null in den Wendepunkten
→ $t = 5, t = 7, t = 13$

d. Die Beschl. ist positiv, wenn die Fkt. eine konvexe Krümmung aufweist und negativ, wenn die Fkt. konkav gekrümmt ist.

⊕: $5 \leq t \leq 7,\ 13 \leq t \leq 15$

⊖: $0 \leq t \leq 5,\ 7 \leq t \leq 13$