ETH Zürich HS 2014
D-INFK
Prof. Dr. P. Embrechts

Koordinator
Blanka Horvath

Wahrscheinlichkeit und Statistik
Lösungsskizze 5

5-1

Sei X ($\in \{0,1\}$) bzw. Y ($\in \{0,1,2\}$) die Anzahl der anfänglich eingesetzten Haupt- bzw. Nebensicherungen, die defekt sind.

a) Es liegt genau dann keine Spannung an beiden Geräten an, wenn die Hauptsicherung oder beide Nebensicherungen kaputt sind. Gesucht wird also

$$\begin{aligned} P[\{X=1\}\cup\{Y=2\}] &= P[X=1]+P[Y=2]-P[\{X=1\}\cap\{Y=2\}] \\ &= P[X=1]+P[Y=2]-P[X=1]\cdot P[Y=2] \\ &= \frac{2}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}-\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{19}{49}=:N. \end{aligned}$$

b) Für die zwei Stragegien H und N gilt:

Strategie H: Sei X_2 ($\in \{0,1\}$) die Anzahl der defekten eingesetzten Ersatzhauptsicherungen. An beiden Geräten liegt genau dann Spannung an, wenn sowohl die Ersatzhauptsicherung als auch die beiden bereits eingesetzten Nebensicherungen intakt sind. Gesucht wird also die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} & P[\{X_2=0\}\cap\{Y=0\} \mid \{X=1\}\cup\{Y=2\}] \\ = & \frac{P\left[\{X_2=0\}\cap\{Y=0\}\cap(\{X=1\}\cup\{Y=2\})\right]}{P[\{X=1\}\cup\{Y=2\}]} \\ = & \frac{1}{N}P\left[(\{X_2=0\}\cap\{Y=0\}\cap\{X=1\})\cup(\{X_2=0\}\cap\{Y=0\}\cap\{Y=2\})\right] \\ = & \frac{1}{N}P\left[\{X=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{Y=0\}\right] \\ = & \frac{1}{N}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{10}{147N}=\frac{10}{57}. \end{aligned}$$

Strategie N: Sei Y_2 ($\in \{0,1,2\}$) die Anzahl der defekten eingesetzten Ersatznebensicherungen. An beiden Geräten liegt genau dann Spannung an, wenn sowohl die ursprünglich eingesetzte Hauptsicherung als auch die beiden Ersatztnebensicherungen intakt sind. Gesucht wird also die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} & P[\{X=0\}\cap\{Y_2=0\} \mid \{X=1\}\cup\{Y=2\}] \\ = & \frac{1}{N}P[\{X=0\}\cap\{Y=2\}\cap\{Y_2=0\}] \\ = & \frac{1}{N}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{49N}=\frac{3}{19}=\frac{9}{57}. \end{aligned}$$

Da also die Strategie H eine (geringfügig) höhere Erfolgswahrscheinlichkeit hat als die Strategie N, ist die Strategie H zu bevorzugen.

5-2

Sei K :="Münzwurf ergibt 'Kopf' " und U_i :="In Urne i befindet sich eine Kugel", wobei $i = 1, 2, 3$. Aus der Aufgabenstellung ergibt sich $P[K] = P[K^c] = \frac{1}{2}$, $P[U_1 \mid K] = p$, $P[U_i \mid K] = \frac{1-p}{2}$, $i = 2, 3$, sowie $P[U_i \mid K^c] = 0$, $i = 1, 2, 3$.

a) Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$P[U_1] = P[U_1 \mid K]P[K] + P[U_1 \mid K^c]P[K^c] = p \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{2}.$$

b) Beachte, dass U_1, U_2, U_3 paarweise disjunkt sind (in allen drei Urnen zusammen befindet sich höchstens eine Kugel). Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} P[U_1^c \cap U_2^c] &= 1 - P[U_1 \cup U_2] = 1 - (P[U_1] + P[U_2]) \\ &= 1 - (P[U_1] + P[U_2 \mid K]P[K] + P[U_2 \mid K^c]P[K^c]) \\ &= 1 - \left(\frac{p}{2} + \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1+p}{4} = \frac{3-p}{4}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

$$\begin{aligned} P[U_1^c \cap U_2^c] &= P[U_1^c \cap U_2^c \mid K]P[K] + P[U_1^c \cap U_2^c \mid K^c]P[K^c] \\ &= P[U_3 \mid K]P[K] + P[U_1^c \cap U_2^c \mid K^c]P[K^c] \\ &= \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3-p}{4}. \end{aligned}$$

c) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[K \mid U_1^c]$ $(= P[U_2 \cup U_3 \mid U_1^c])$. Wir können sie mit der Formel von Bayes berechnen:

$$P[K \mid U_1^c] = \frac{P[U_1^c \mid K]P[K]}{P[U_1^c]} = \frac{(1 - P[U_1 \mid K])P[K]}{1 - P[U_1]} = \frac{(1-p)\frac{1}{2}}{1 - \frac{p}{2}} = \frac{1-p}{2-p}.$$

d) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c]$ $(= P[K \mid U_1^c \cap U_2^c])$.
Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt (beachte, dass $U_3 \subset U_1^c \cap U_2^c$)

$$P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c] = \frac{P[U_3 \cap U_1^c \cap U_2^c]}{P[U_1^c \cap U_2^c]} = \frac{P[U_3]}{P[U_1^c \cap U_2^c]}.$$

Analog zu **a)** ist

$$P[U_3] = P[U_3 \mid K]P[K] + P[U_3 \mid K^c]P[K^c] = \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-p}{4},$$

und aus **b)** haben wir $P[U_1^c \cap U_2^c] = \frac{3-p}{4}$. Somit ergibt sich weiter:

$$P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c] = \frac{\frac{1-p}{4}}{\frac{3-p}{4}} = \frac{1-p}{3-p}.$$

5-3

a) Wir setzen $m = |S|$. Ist P die Gleichverteilung auf Ω, so gilt einerseits für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in S^n$, dass

$$p(x_1, \ldots, x_n) = P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P[\{(x_1, \ldots, x_n)\}] = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{m^n}.$$

Andererseits ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Gewichtsfunktion p_{X_i} der Randverteilung von X_i gegeben durch

$$p_{X_i}(x_i) = P[X_i = x_i] = P[\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_i = x_i\}] = \frac{m^{n-1}}{m^n} = \frac{1}{m}.$$

Zusammen ergibt sich dann $p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{m}\right)^n = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i)$ für alle $(x_1, \ldots x_n) \in S^n$, d.h. $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig.

b) Aus Unabhängigkeit folgt nicht notwendigerweise die Gleichverteilung. Als Beispiel kann man den Fall $S = \{0, 1\}$ und $n = 2$ betrachten, d.h. $\Omega = \{0, 1\}^2$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Wählt man P so, dass X_1, X_2 unabhängig sind und $P[X_i = 1] = p$ für $i = 1, 2$ und ein $p \in (0, 1)$, so gilt für $(x_1, x_2) \in \Omega$, dass

$$P[\{(x_1, x_2)\}] = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = P[X_1 = x_1]P[X_2 = x_2] \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{|\Omega|} \text{ falls } p \neq \frac{1}{2}.$$