

Stochastik

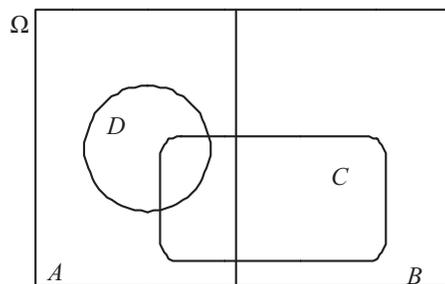
Serie 1

1. a) Mit A , B und C bezeichne man Ereignisse. Welche der folgenden Schreibweisen ergeben einen Sinn?

- i) $P(A \cup (B \cap C))$
- ii) $P(A) + P(B)$
- iii) $P(A^c) \cap P(B)$
- iv) $(P(B))^c$

b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse im angegebenen Venn-Diagramm dar:

- i) $C \cap D$
- ii) $(D \setminus C) \cup (C \cap A)$
- iii) $B \cup D$



c) Über einen Nachrichtenkanal werden 4 Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen als Wahrscheinlichkeitsraum Ω die Menge der 0-1 Folgen der Länge 4 gemäss

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\},$$

d.h. $\Omega = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), \dots, (1, 1, 1, 1)\}$ und interpretieren (für $i = 1, \dots, 4$), $x_i = 1$ als “ i -tes Signal richtig übertragen” und $x_i = 0$ als “ i -tes Signal falsch übertragen”.

Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

Bitte wenden!

- A : "Genau ein Signal wird richtig übertragen"
- B : "Mindestens 2 Signale werden richtig übertragen"
- C : "Höchstens 2 Signale werden richtig übertragen".

Nun

- (i) schreibe die Ereignisse A , B und C als Teilmengen von Ω auf.
- (ii) beschreibe in Worten die Ereignisse $B \cap C$, $A \cup B$ und $A^c \cap C^c$.

2. a) Die Ereignisse A und B seien disjunkt und $P(B) > 0$ sowie $P(A) > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- i) $P(A^c \cap B^c) + P(B) = 1 - P(A)$
- ii) $P(A \cap B) < P(A)$
- iii) $P(A \cup B) > P(A)$

Tipp: Zeichne ein Venn-Diagramm (siehe Aufgabe 1 b)).

- b) Benutze die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S.5 im Skript) um die folgenden Rechenregeln ((1.4) und (1.5) im Skript) zu zeigen: Seien A und B zwei Ereignisse **mit** $B \subset A$. Dann gilt

- i) $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
- ii) $P(B) \leq P(A)$.

Tipp: Schreibe $A = B \cup (A \setminus B)$ und beachte, dass B und $A \setminus B$ disjunkt sind.

3. Wir werfen gleichzeitig einen roten und einen grünen Würfel und betrachten die folgenden Ereignisse:

W_1 = „Keine der beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2.“

W_2 = „Der rote Würfel zeigt dieselbe Zahl wie der grüne Würfel.“

W_3 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist das Doppelte der Zahl auf dem grünen Würfel.“

W_4 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist um eins grösser oder kleiner als die Zahl auf dem grünen Würfel.“

W_5 = „Wenn die Zahl auf dem roten Würfel höchstens 5 ist, zeigt der grüne Würfel eine 6.“

Wähle einen geeigneten Grundraum Ω und identifiziere die obigen Ereignisse mit Teilmengen von Ω . Von welchen der obigen Ereignisse kann man entscheiden, ob sie eintreten, wenn man das Würfeln zwar beobachtet, aber farbenblind ist, so dass man rot und grün nicht unterscheiden kann?

Siehe nächstes Blatt!

Tipp: Wähle als Grundraum

$$\Omega = \{(r, g) : r, g \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$$

die Menge aller Paare der Zahlen von 1 bis 6. Die erste Komponente r steht für die Augenzahl des roten Würfels, die zweite Komponente g für die des Grünen.

4. Fünf Buchstaben werden nacheinander zufällig und unabhängig voneinander

a) „mit Zurücklegen“, d.h. mit der Möglichkeit von Wiederholungen,

b) „ohne Zurücklegen“, d.h. ohne Wiederholungen,

aus den 26 Grossbuchstaben des Alphabets ausgewählt, wobei für alle Buchstaben die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, gleich ist. Die fünf Buchstaben werden in der Reihenfolge, in der sie gezogen wurden, zu einem 'Wort' zusammengesetzt. Bestimmen Sie für a) und b) jeweils die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A_1 = „Das 'Wort' enthält mindestens ein A.“

A_2 = „Das 'Wort' enthält genau einen Vokal.“ (Bem.: Die Vokale sind A, E, I, O, U.)

A_3 = „Das 'Wort' ist APRIL.“

Tipp: Für $P(A_1)$, berechne zuerst die Wahrscheinlichkeit, dass das 'Wort' kein A enthält.

Abgabe: Montag, 29. bzw. Dienstag, 30. September in den Übungsstunden oder vor den Übungen in den Fächern im HG E 65.

Präsenz: Montag, 18-19 Uhr im HG E 33.1.

Homepage: www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/stochastik_MAVT