

Name:

Studiengang:

Vorname:

Legi-Nr.:

---

---

Algebra I

Prof. Richard Pink

D-MATH, HS 2015

# Algebra I

## Zwischenprüfung

19. Februar 2016

### Wichtig:

- Die Prüfung dauert **120 Minuten**.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studierendenausweis) offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Jede Aufgabe bietet vier bis fünf Aussagen an, die unabhängig voneinander richtig oder falsch sein können. Kreuzen Sie für jede Aussage das Kästchen “richtig” oder “falsch” an. Für ein korrektes Kreuz erhalten Sie **1 Punkt**, für ein unkorrektes **1 Minuspunkt**. Wenn sie bei einer Aussage kein Kreuz oder beide Kreuze machen, erhalten Sie dafür **0 Punkte**.
- Berücksichtigt werden nur Kreuze in den vorgesehenen Feldern, also keine weiteren Erklärungen usw.
- Etwaige Korrekturen klar kennzeichnen.
- Hilfsmittel: Keine. (Insbesondere keine Zusammenfassung, keine Literatur, keine Notizen, keine elektronischen Hilfsmittel wie z.B. Taschenrechner, keine Kommunikationsmittel wie z.B. Handy.)

Viel Erfolg!

1. Betrachte den Ring  $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{2}, \frac{1}{2}]$ . Welche der folgenden sind Unterringe von  $R$ ?
- Richtig  Falsch (a)  $\mathbb{Z}[\frac{i}{\sqrt{2}}]$ .
- Richtig  Falsch (b)  $\{a \cdot i\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ .
- Richtig  Falsch (c)  $\mathbb{Z}[i]$ .
- Richtig  Falsch (d)  $2\mathbb{Z}$ .
2. Betrachte einen Ring  $R$ , einen Körper  $K$ , und einen Homomorphismus  $\varphi : R \rightarrow K$ .
- Richtig  Falsch (a) Dann ist  $\text{Kern}(\varphi)$  ein Primideal von  $R$ .
- Richtig  Falsch (b) Wenn  $R$  ein Integritätsbereich ist, dann setzt sich  $\varphi$  fort zu einem eindeutigen Homomorphismus  $\tilde{\varphi} : \text{Quot}(R) \rightarrow K$ .
- Richtig  Falsch (c) Wenn  $K$  endlich ist, muss  $R$  auch endlich sein.
- Richtig  Falsch (d) Wenn  $R$  endlich ist, muss  $\text{Bild}(\varphi)$  ein Körper sein.
3. Sei  $R$  ein Ring und  $\mathfrak{a} \subset R$  ein echtes Ideal. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
- Richtig  Falsch (a) Für beliebige  $r, s \in R$  gilt  $r + \mathfrak{a} = s + \mathfrak{a}$  genau dann, wenn  $r = s$  ist.
- Richtig  Falsch (b) Wenn es einen Körper  $K$  und einen Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow K$  gibt, sodass  $\text{Kern}(\varphi) = \mathfrak{a}$  ist, dann ist  $\mathfrak{a}$  ein maximales Ideal.
- Richtig  Falsch (c) Es gilt  $(x) + \mathfrak{a} = (1)$  für alle  $x \in R \setminus \mathfrak{a}$  genau dann, wenn  $\mathfrak{a}$  maximal ist.
- Richtig  Falsch (d) Ist  $\mathfrak{a} = (a, b)$  für gewisse  $a, b \in R$ , dann ist  $\mathfrak{a}$  kein Hauptideal.
4. Sei  $R$  ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper  $K$ . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
- Richtig  Falsch (a) Jedes Element von  $R[X] \setminus \{0\}$  hat eine eindeutige Anzahl Primfaktoren.
- Richtig  Falsch (b) Jedes irreduzible Element von  $R[X]$  ist irreduzibel als Element von  $K[X]$ .
- Richtig  Falsch (c) Wenn  $R$  ein Hauptidealring ist, dann ist auch  $R[X]$  ein Hauptidealring.
- Richtig  Falsch (d)  $(R[X])^\times = R^\times$ .
5. Sei  $R$  ein beliebiger Hauptidealring. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
- Richtig  Falsch (a)  $R$  ist ein Integritätsbereich, aber nicht notwendigerweise faktoriell.
- Richtig  Falsch (b) Jedes Primideal in  $R$  ist maximal.
- Richtig  Falsch (c) Für jedes irreduzible  $a \in R$  ist das Ideal  $(a) \subset R$  ein Primideal.
- Richtig  Falsch (d)  $R$  ist ein euklidischer Ring.
- Richtig  Falsch (e) Es existiert ein Körper  $K$ , so dass  $R$  isomorph zu  $K[X]$  ist.

6. Betrachte den Ring  $R := \mathbb{Z}[i]$ , der bezüglich der Normabbildung

$$N : R \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq 0} : a + bi \mapsto a^2 + b^2$$

ein euklidischer Ring ist. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig  Falsch (a) Das Element 2 ist prim in  $R$ .
- Richtig  Falsch (b) Ein Element  $\pi \in R$  ist irreduzibel genau dann, wenn  $N(\pi)$  eine Primzahl ist.
- Richtig  Falsch (c) Für beliebige  $r_1, \dots, r_n \in R$  gibt es Elemente  $x_1, \dots, x_n \in R$ , so dass gilt

$$\text{ggT}(r_1, \dots, r_n) = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n.$$

- Richtig  Falsch (d)  $\text{ggT}(4 + i, 3 + 5i) \sim 1 - 4i$ .

7. Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

- Richtig  Falsch (a)  $\frac{1}{10}X^4 + 3X^3 + 15X + \frac{2}{10}$  in dem Ring  $\mathbb{Q}[X]$ .
- Richtig  Falsch (b)  $X^{2016} + X^{19} + X^2 - 1$  in dem Ring  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ .
- Richtig  Falsch (c)  $X^3 + X^2 + 1$  in dem Ring  $\mathbb{Z}[X]$ .
- Richtig  Falsch (d)  $Y^3 + (X^2 - 2iX - 1)Y^2 + (X^2 + 1)Y - X + i$  in dem Ring  $\mathbb{C}[X, Y]$ .

8. Für welche der folgenden Matrizen in  $M_{3 \times 2}(\mathbb{Z})$  ist 3 ein Elementarteiler?

- Richtig  Falsch (a)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
- Richtig  Falsch (b)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Richtig  Falsch (c)  $\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 15 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
- Richtig  Falsch (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 15 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

9. Es gibt genau 2 Elemente ...

- Richtig  Falsch (a) der Ordnung 6 in  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .
- Richtig  Falsch (b) der Ordnung 3 in  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ .
- Richtig  Falsch (c) der Ordnung 2 in der Quaternionengruppe  $Q$ .
- Richtig  Falsch (d) in  $S_5/A_5$ .

10. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Richtig  Falsch (a) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen  $S_2 \rightarrow S_3$  ist 4.
- Richtig  Falsch (b) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen  $A_3 \rightarrow S_3$  ist 3.
- Richtig  Falsch (c) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen  $S_3 \rightarrow S_2$  ist 2.
- Richtig  Falsch (d) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen  $S_3 \rightarrow A_3$  ist 1.

11. Sei  $G$  eine beliebige endliche Gruppe. Welche der folgenden Bedingungen ist äquivalent dazu, dass  $G$  kommutativ ist?

- Richtig  Falsch (a) Die Abbildung  $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$  ist ein Homomorphismus.
- Richtig  Falsch (b) Die Abbildung  $G \rightarrow G, g \mapsto g^2$  ist ein Homomorphismus.
- Richtig  Falsch (c) Für fast alle  $n \in \mathbb{Z}$  ist die Abbildung  $G \rightarrow G, g \mapsto g^n$  ein Homomorphismus.
- Richtig  Falsch (d) Die Faktorgruppe  $G/Z(G)$  ist zyklisch.
- Richtig  Falsch (e) Die Faktorgruppe  $G/[G, G]$  ist zyklisch.

12. Der Gruppenhomomorphismus ...

- Richtig  Falsch (a)  $3\mathbb{Z}/69\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}, a + 69\mathbb{Z} \mapsto a + 21\mathbb{Z}$  ist wohldefiniert.
- Richtig  Falsch (b)  $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, a + 8\mathbb{Z} \mapsto a + 4\mathbb{Z}$  ist injektiv.
- Richtig  Falsch (c)  $27\mathbb{Z}/135\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, a + 135\mathbb{Z} \mapsto a + 15\mathbb{Z}$  ist surjektiv.
- Richtig  Falsch (d)  $7\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, a + 91\mathbb{Z} \mapsto a + 13\mathbb{Z}$  ist bijektiv.

13. Jedes Element  $\sigma \in S_n$  ist konjugiert zu  $\sigma^5$  im Fall ...

- Richtig  Falsch (a)  $n = 3$ .
- Richtig  Falsch (b)  $n = 4$ .
- Richtig  Falsch (c)  $n = 5$ .
- Richtig  Falsch (d)  $n$  beliebig.

14. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig  Falsch (a) Die Gruppe  $A_5$  ist von den Elementen  $(1\ 2\ 3)$  und  $(3\ 4\ 5)$  erzeugt.
- Richtig  Falsch (b) Die Gruppe  $A_5$  ist von den Elementen  $(1\ 2\ 3\ 4)$  und  $(4\ 5)$  erzeugt.
- Richtig  Falsch (c) Die Gruppe  $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$  ist von der Restklasse  $4 + 25\mathbb{Z}$  erzeugt.
- Richtig  Falsch (d) Die Gruppe  $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$  ist von der Restklasse  $4 + 25\mathbb{Z}$  erzeugt.

15. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig  Falsch (a)  $A_4 \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .
- Richtig  Falsch (b) Es existiert ein  $\pi \in S_5$  mit  $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ .
- Richtig  Falsch (c) Es existiert ein  $\pi \in S_6$  mit  $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$ .
- Richtig  Falsch (d) Jede Permutation  $\pi \in S_n$  mit  $\pi^3 = \text{id}$  ist gerade.

16. Betrachte die Permutation  $\pi := (1\ 3\ 8\ 2)(4\ 5\ 9)(6\ 7) \in S_9$ . Für welche ganzen Zahlen  $k$  gilt  $\pi^k = \text{id}$ ?

- Richtig  Falsch (a)  $k = 42$
- Richtig  Falsch (b)  $k = 180$
- Richtig  Falsch (c)  $k = 25$
- Richtig  Falsch (d)  $k = 12$
- Richtig  Falsch (e)  $k = 2016$

17. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig  Falsch (a) Jede Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe.
- Richtig  Falsch (b) Die Länge einer Kompositionsreihe hängt nur von der Gruppenordnung ab.
- Richtig  Falsch (c) Je zwei Kompositionsreihen derselben Gruppe haben dieselbe Länge.
- Richtig  Falsch (d) Jede endliche zyklische Gruppe hat genau eine Kompositionsreihe.

18. Welche der folgenden Aussagen gilt für beliebige Normalteiler  $N$  und  $N'$  einer beliebigen Gruppe  $G$ ?

- Richtig  Falsch (a) Auch  $NN'$  ist ein Normalteiler von  $G$ .
- Richtig  Falsch (b) Sind  $N$  und  $N'$  auflösbar, so ist auch  $NN'$  auflösbar.
- Richtig  Falsch (c) Sind  $N$  und  $N'$  abelsch, so ist auch  $NN'$  abelsch.
- Richtig  Falsch (d) Jede Untergruppe von  $N/(N \cap N')$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $NN'/N'$ .
- Richtig  Falsch (e) Jede Untergruppe von  $N/(N \cap N')$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $NN'/N$ .

19. Welche der folgenden Aussagen gilt für eine beliebige Primzahl  $p$ ?

- Richtig  Falsch (a) Jede Gruppe der Ordnung  $p(p - 1)$  ist auflösbar.
- Richtig  Falsch (b) Jede Gruppe der Ordnung  $p^n$  für beliebiges  $n \geq 1$  ist auflösbar.
- Richtig  Falsch (c) Es gibt genau 5 Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung  $p^3$ .
- Richtig  Falsch (d) Es gibt genau 5 Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung  $p^4$ .

20. Jede Gruppe der Ordnung 2015 ist

- Richtig  Falsch (a) abelsch
- Richtig  Falsch (b) auflösbar
- Richtig  Falsch (c) einfach
- Richtig  Falsch (d) zyklisch