

Name:

Studiengang:

Vorname:

Legi-Nr.:

Algebra I

Prof. Richard Pink

D-MATH, HS 2015

Algebra I

Zwischenprüfung

19. Februar 2016

Wichtig:

- Die Prüfung dauert **120 Minuten**.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studierendenausweis) offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Jede Aufgabe bietet vier bis fünf Aussagen an, die unabhängig voneinander richtig oder falsch sein können. Kreuzen Sie für jede Aussage das Kästchen “richtig” oder “falsch” an. Für ein korrektes Kreuz erhalten Sie **1 Punkt**, für ein unkorrektes **1 Minuspunkt**. Wenn sie bei einer Aussage kein Kreuz oder beide Kreuze machen, erhalten Sie dafür **0 Punkte**.
- Berücksichtigt werden nur Kreuze in den vorgesehenen Feldern, also keine weiteren Erklärungen usw.
- Etwaige Korrekturen klar kennzeichnen.
- Hilfsmittel: Keine. (Insbesondere keine Zusammenfassung, keine Literatur, keine Notizen, keine elektronischen Hilfsmittel wie z.B. Taschenrechner, keine Kommunikationsmittel wie z.B. Handy.)

Viel Erfolg!

1. Betrachte den Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{2}, \frac{1}{2}]$. Welche der folgenden sind Unterringe von R ?
- Richtig Falsch (a) $\mathbb{Z}[\frac{i}{\sqrt{2}}]$.
- Richtig Falsch (b) $\{a \cdot i\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.
- Richtig Falsch (c) $\mathbb{Z}[i]$.
- Richtig Falsch (d) $2\mathbb{Z}$.
2. Betrachte einen Ring R , einen Körper K , und einen Homomorphismus $\varphi : R \rightarrow K$.
- Richtig Falsch (a) Dann ist $\text{Kern}(\varphi)$ ein Primideal von R .
- Richtig Falsch (b) Wenn R ein Integritätsbereich ist, dann setzt sich φ fort zu einem eindeutigen Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \text{Quot}(R) \rightarrow K$.
- Richtig Falsch (c) Wenn K endlich ist, muss R auch endlich sein.
- Richtig Falsch (d) Wenn R endlich ist, muss $\text{Bild}(\varphi)$ ein Körper sein.
3. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein echtes Ideal. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
- Richtig Falsch (a) Für beliebige $r, s \in R$ gilt $r + \mathfrak{a} = s + \mathfrak{a}$ genau dann, wenn $r = s$ ist.
- Richtig Falsch (b) Wenn es einen Körper K und einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow K$ gibt, sodass $\text{Kern}(\varphi) = \mathfrak{a}$ ist, dann ist \mathfrak{a} ein maximales Ideal.
- Richtig Falsch (c) Es gilt $(x) + \mathfrak{a} = (1)$ für alle $x \in R \setminus \mathfrak{a}$ genau dann, wenn \mathfrak{a} maximal ist.
- Richtig Falsch (d) Ist $\mathfrak{a} = (a, b)$ für gewisse $a, b \in R$, dann ist \mathfrak{a} kein Hauptideal.
4. Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
- Richtig Falsch (a) Jedes Element von $R[X] \setminus \{0\}$ hat eine eindeutige Anzahl Primfaktoren.
- Richtig Falsch (b) Jedes irreduzible Element von $R[X]$ ist irreduzibel als Element von $K[X]$.
- Richtig Falsch (c) Wenn R ein Hauptidealring ist, dann ist auch $R[X]$ ein Hauptidealring.
- Richtig Falsch (d) $(R[X])^\times = R^\times$.
5. Sei R ein beliebiger Hauptidealring. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
- Richtig Falsch (a) R ist ein Integritätsbereich, aber nicht notwendigerweise faktoriell.
- Richtig Falsch (b) Jedes Primideal in R ist maximal.
- Richtig Falsch (c) Für jedes irreduzible $a \in R$ ist das Ideal $(a) \subset R$ ein Primideal.
- Richtig Falsch (d) R ist ein euklidischer Ring.
- Richtig Falsch (e) Es existiert ein Körper K , so dass R isomorph zu $K[X]$ ist.

6. Betrachte den Ring $R := \mathbb{Z}[i]$, der bezüglich der Normabbildung

$$N : R \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq 0} : a + bi \mapsto a^2 + b^2$$

ein euklidischer Ring ist. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig Falsch (a) Das Element 2 ist prim in R .
- Richtig Falsch (b) Ein Element $\pi \in R$ ist irreduzibel genau dann, wenn $N(\pi)$ eine Primzahl ist.
- Richtig Falsch (c) Für beliebige $r_1, \dots, r_n \in R$ gibt es Elemente $x_1, \dots, x_n \in R$, so dass gilt

$$\text{ggT}(r_1, \dots, r_n) = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n.$$

- Richtig Falsch (d) $\text{ggT}(4 + i, 3 + 5i) \sim 1 - 4i$.

7. Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

- Richtig Falsch (a) $\frac{1}{10}X^4 + 3X^3 + 15X + \frac{2}{10}$ in dem Ring $\mathbb{Q}[X]$.
- Richtig Falsch (b) $X^{2016} + X^{19} + X^2 - 1$ in dem Ring $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.
- Richtig Falsch (c) $X^3 + X^2 + 1$ in dem Ring $\mathbb{Z}[X]$.
- Richtig Falsch (d) $Y^3 + (X^2 - 2iX - 1)Y^2 + (X^2 + 1)Y - X + i$ in dem Ring $\mathbb{C}[X, Y]$.

8. Für welche der folgenden Matrizen in $M_{3 \times 2}(\mathbb{Z})$ ist 3 ein Elementarteiler?

- Richtig Falsch (a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
- Richtig Falsch (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Richtig Falsch (c) $\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 15 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
- Richtig Falsch (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 15 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

9. Es gibt genau 2 Elemente ...

- Richtig Falsch (a) der Ordnung 6 in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
- Richtig Falsch (b) der Ordnung 3 in $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.
- Richtig Falsch (c) der Ordnung 2 in der Quaternionengruppe Q .
- Richtig Falsch (d) in S_5/A_5 .

10. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Richtig Falsch (a) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $S_2 \rightarrow S_3$ ist 4.
- Richtig Falsch (b) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $A_3 \rightarrow S_3$ ist 3.
- Richtig Falsch (c) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $S_3 \rightarrow S_2$ ist 2.
- Richtig Falsch (d) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $S_3 \rightarrow A_3$ ist 1.

11. Sei G eine beliebige endliche Gruppe. Welche der folgenden Bedingungen ist äquivalent dazu, dass G kommutativ ist?

- Richtig Falsch (a) Die Abbildung $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ ist ein Homomorphismus.
- Richtig Falsch (b) Die Abbildung $G \rightarrow G, g \mapsto g^2$ ist ein Homomorphismus.
- Richtig Falsch (c) Für fast alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $G \rightarrow G, g \mapsto g^n$ ein Homomorphismus.
- Richtig Falsch (d) Die Faktorgruppe $G/Z(G)$ ist zyklisch.
- Richtig Falsch (e) Die Faktorgruppe $G/[G, G]$ ist zyklisch.

12. Der Gruppenhomomorphismus ...

- Richtig Falsch (a) $3\mathbb{Z}/69\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}, a + 69\mathbb{Z} \mapsto a + 21\mathbb{Z}$ ist wohldefiniert.
- Richtig Falsch (b) $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, a + 8\mathbb{Z} \mapsto a + 4\mathbb{Z}$ ist injektiv.
- Richtig Falsch (c) $27\mathbb{Z}/135\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, a + 135\mathbb{Z} \mapsto a + 15\mathbb{Z}$ ist surjektiv.
- Richtig Falsch (d) $7\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, a + 91\mathbb{Z} \mapsto a + 13\mathbb{Z}$ ist bijektiv.

13. Jedes Element $\sigma \in S_n$ ist konjugiert zu σ^5 im Fall ...

- Richtig Falsch (a) $n = 3$.
- Richtig Falsch (b) $n = 4$.
- Richtig Falsch (c) $n = 5$.
- Richtig Falsch (d) n beliebig.

14. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig Falsch (a) Die Gruppe A_5 ist von den Elementen $(1\ 2\ 3)$ und $(3\ 4\ 5)$ erzeugt.
- Richtig Falsch (b) Die Gruppe A_5 ist von den Elementen $(1\ 2\ 3\ 4)$ und $(4\ 5)$ erzeugt.
- Richtig Falsch (c) Die Gruppe $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ ist von der Restklasse $4 + 25\mathbb{Z}$ erzeugt.
- Richtig Falsch (d) Die Gruppe $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ ist von der Restklasse $4 + 25\mathbb{Z}$ erzeugt.

15. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig Falsch (a) $A_4 \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
- Richtig Falsch (b) Es existiert ein $\pi \in S_5$ mit $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$.
- Richtig Falsch (c) Es existiert ein $\pi \in S_6$ mit $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$.
- Richtig Falsch (d) Jede Permutation $\pi \in S_n$ mit $\pi^3 = \text{id}$ ist gerade.

16. Betrachte die Permutation $\pi := (1\ 3\ 8\ 2)(4\ 5\ 9)(6\ 7) \in S_9$. Für welche ganzen Zahlen k gilt $\pi^k = \text{id}$?

- Richtig Falsch (a) $k = 42$
- Richtig Falsch (b) $k = 180$
- Richtig Falsch (c) $k = 25$
- Richtig Falsch (d) $k = 12$
- Richtig Falsch (e) $k = 2016$

17. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Richtig Falsch (a) Jede Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe.
- Richtig Falsch (b) Die Länge einer Kompositionsreihe hängt nur von der Gruppenordnung ab.
- Richtig Falsch (c) Je zwei Kompositionsreihen derselben Gruppe haben dieselbe Länge.
- Richtig Falsch (d) Jede endliche zyklische Gruppe hat genau eine Kompositionsreihe.

18. Welche der folgenden Aussagen gilt für beliebige Normalteiler N und N' einer beliebigen Gruppe G ?

- Richtig Falsch (a) Auch NN' ist ein Normalteiler von G .
- Richtig Falsch (b) Sind N und N' auflösbar, so ist auch NN' auflösbar.
- Richtig Falsch (c) Sind N und N' abelsch, so ist auch NN' abelsch.
- Richtig Falsch (d) Jede Untergruppe von $N/(N \cap N')$ ist isomorph zu einer Untergruppe von NN'/N' .
- Richtig Falsch (e) Jede Untergruppe von $N/(N \cap N')$ ist isomorph zu einer Untergruppe von NN'/N .

19. Welche der folgenden Aussagen gilt für eine beliebige Primzahl p ?

- Richtig Falsch (a) Jede Gruppe der Ordnung $p(p - 1)$ ist auflösbar.
- Richtig Falsch (b) Jede Gruppe der Ordnung p^n für beliebiges $n \geq 1$ ist auflösbar.
- Richtig Falsch (c) Es gibt genau 5 Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung p^3 .
- Richtig Falsch (d) Es gibt genau 5 Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung p^4 .

20. Jede Gruppe der Ordnung 2015 ist

- Richtig Falsch (a) abelsch
- Richtig Falsch (b) auflösbar
- Richtig Falsch (c) einfach
- Richtig Falsch (d) zyklisch