Serie 7

Moduln über Hauptidealringen, Jordansche Normalform

*1. Eine Folge von Elementen $(m_1, \ldots, m_n)$ eines R-Moduls M heisst eine *Basis von* M, wenn jedes Element von M auf eindeutige Weise als $a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n$ mit $a_i \in R$ darstellbar ist. Besitzt M eine Basis der Länge n, so ist M isomorph zu R^n, also frei vom Rang n.

Sei nun M ein freier Modul von endlichem Rang n über einem Hauptidealring R. Beweise oder widerlege:

(a) Jede linear unabhängige Teilmenge von M lässt sich zu einer Basis von M ergänzen.

(b) Aus jedem Erzeugendensystem von M lässt sich eine Basis von M auswählen.

(c) Jeder Untermodul von M ist frei vom Rang $\leqslant n$.

2. Sei $A := \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$ wie in Aufgabe 3 der Serie 6. Gib einen expliziten Isomorphismus von $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2$ auf ein direktes Produkt von zyklischen $\mathbb{Z}$-Moduln an.

3. (a) Bestimme alle Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{Z}$-Moduln der Kardinalität 600.

(b) Bestimme alle Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{F}_2[X]$-Moduln der Kardinalität 16 (verwende Aufgabe 5 der Serie 5).

4. Seien R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Wegen der Vorlesung existieren Zahlen $r, \ell \geqslant 0$ und Primelemente $p_i \in R$ und Exponenten $\nu_i \geqslant 1$, so dass gilt

$$M \cong R^r \boxplus \bigboxplus_{i=1}^{\ell} R/(p_i^{\nu_i}).$$

Zeige: Für jedes Primelement $p \in R$ und jedes $\nu \geqslant 1$ gilt

$$\dim_{R/(p)}(p^\nu M/p^{\nu+1}M) \;=\; r + \big|\{1 \leqslant i \leqslant \ell \mid p_i \sim p \wedge \nu_i > \nu\}\big|.$$

Folgere daraus, dass die Zahlen r und ℓ, sowie die Paare (p_i, ν_i) bis auf Vertauschung und Assoziiertheit der p_i eindeutig bestimmt durch M sind.

5. Sei K ein Körper.

   (a) Konstruiere $K[X,Y]$-Moduln M und M' von endlicher Dimension über K, so dass M und M' isomorph als $K[X]$- und als $K[Y]$-Moduln sind, aber nicht als $K[X,Y]$-Moduln.

   (b) Folgere aus (a), dass Matrizen A, B, A', B' geeigneter Grösse $n \times n$ über K existieren mit den Eigenschaften:

      i. $AB = BA$.

      ii. $A'B' = B'A'$.

      iii. Es existiert $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $UAU^{-1} = A'$.

      iv. Es existiert $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $UBU^{-1} = B'$.

      v. Es existiert kein $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $UAU^{-1} = A'$ und $UBU^{-1} = B'$.

6. Konstruiere die Jordan-Chevalley-Zerlegung der komplexen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

   je einmal mit Hilfe des chinesischen Restsatzes wie im Beweis der Zerlegung, und einmal mit Hilfe der Jordan-Normalform von A. Welcher Weg ist schneller?