Lösung: Serie 8

1. Seien $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{n,n}(K)$ und $\lambda, \mu \in K$.

a) Es gilt

$$Tr(\mu A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (\mu A + \lambda B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (\mu a_{ii} + \lambda b_{ii}) =$$
$$= \mu \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mu \operatorname{Tr}(A) + \lambda \operatorname{Tr}(B),$$

also Tr ist linear.

b)

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \operatorname{Tr}(BA).$$

2. Linearität heisst, dass $f_{\lambda A + \mu B} = \lambda f_A + \mu f_B$ für $A, B \in M_{m,n}(K)$ und $\lambda, \mu \in K$.

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jeder linearen Abbildung $g \in \operatorname{Hom}_K(K^n, K^m)$ die eindeutige Matrix A entspricht, sodass $g = f_A$. Das heisst genau, dass f bijektiv ist, also $\operatorname{Kern}(f) = \{0_{m,\,n}\}$ und $\operatorname{Bild}(f) = M_{m,n}(K)$.
f ist ein Isomorphismus $M_{m,n}(K) \to \operatorname{Hom}_K(K^n, K^m)$. Der Raum $M_{m,n}(K)$ ist endlichdimensional, und somit ist $\operatorname{Hom}_K(K^n, K^m)$ auch endlichdimensional.
Direkte Lösung: Sei $f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, x_j, \ldots 0)$, wobei x_j die i-te Koordinate des Vektors an der rechten Seite ist. Wir behaupten, dass $\{f_{ij} \mid i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m\}$ ein Erzeugendensystem für $\operatorname{Hom}_K(K^n, K^m)$ ist. In der Tat, sei $g \in \operatorname{Hom}_K(K^n, K^m)$. $g = f_A$ für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, und das ergibt genau die Linearkombination $g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$. $\operatorname{Hom}_K(K^n, K^m)$ hat ein endliches Erzeugendensystem, und ist daher endlichdimensional.
Merken Sie sich, das f_{ij} entspricht genau der Matrix E_{ij}. Die Matrix E_{ij} (definiert in der Vorlesung) hat alle Null-Einträg, ausser dem Eintrag (ij), der 1 beträgt.

3. Wir nehmen an, dass $W_1 \cup W_1$ ein Unterraum von V ist, $W_1 \not\subseteq W_2$ und $W_2 \not\subseteq W_1$. Seien $v_1 \in W_1 \setminus W_2$ und $v_2 \in W_2 \setminus W_1$. Die Summe $v = v_1 + v_2$ gehört zum $W_1 \cup W_2$, OBdA $v \in W_1$. Da $v_2 = v - v_1$, liegt v_2 auch in W_1, im Widerspruch zur Annahme $v_2 \in W_2 \setminus W_1$.
Es folgt, $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

4. Sei D invertierbar, also es existiert eine $B \in M_{n,n}(K)$, sodass

$$DB = \mathrm{I}_n. \tag{1}$$

Sei $i \in \{1, 2, \dots n\}$ und sei $b \in M_{n,1}$ die i-te Spalte von B. Der Eintrag $(DB)_{ii}$ ist $(0, 0, \dots a_i, \dots, 0) \cdot b$, und (1) impliziert $(0, 0, \dots a_i, \dots, 0) \cdot b = 1$. Daher ist $a_i \neq 0$.
Da i beliebig war, es gilt $\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.
Umgekehrt, wenn $a_i \neq 0$ für alle i, die Diagonalmatrix B

$$D = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

ist die Inverse von A.

5. a) Sei $aA_1 + bA_2 = 0_{2,3}$ für $a, b \in R$. Die Koordinate $(1, 1)$ ergibt $a = 0$, und somit $b = 0$.

b) Sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(R) \mid d = e = 0, \quad b - a = f, \quad 3a = c \right\}.$$

'$\langle\{A_1, A_2\}\rangle \subseteq S$': Jedes Element A des Erzeugnises $\langle\{A_1, A_2\}\rangle$ hat die Form

$$A = xA_1 + yA_2 = \begin{pmatrix} x & 2x + y & 3x \\ 0 & 0 & x + y \end{pmatrix}.$$

Die Einträge erfüllen tatsächlich $(2x + y) - x = x + y$ und $3 \cdot x = 3x$, also A liegt in S.

'$S \subseteq \langle\{A_1, A_2\}\rangle$': Sei $A \in S$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 3a \\ 0 & 0 & b - a \end{pmatrix}.$$

A lässt sich als $A = aA_1 + (b - 2a)A_2$ darstellen, also $A \in \langle\{A_1, A_2\}\rangle$.

c) Sei $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Angenommen, $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = 0$. Der Eintrag $(2, 1)$ ergibt $a_3 = 0$, und somit $a_2 = a_1 = 0$.
$\langle\{A_1, A_2, A_3\}\rangle \neq M_{2,3}(K)$, denn jede Matrix $A = (a_{ij})$ im fraglichen Erzeugnis erfüllt $a_{2,2} = 0$.

6. a) Siehe Aufgabe 3.a) in der Serie 7.

b) Sei $x_1 = (1, 0, 0, -1)$, $x_2 = (0, 1, 0, -1)$ und $x_3 = (0, 0, 1, -1)$. Die Menge $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ erzeugt W, da $(a, b, c, d) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ für alle $(a, b, c, d) \in W$ (die vierte Koordinate muss $-a - b - c$ sein).
Alternativ, ein Unterraum eines endlichdimensionalen Raum (in diesem Fall C^4) ist auch endlichdimensional.

c) Wir haben gezeigt, $\langle S \rangle = W$. S ist linear unabhängig.

7. a) Die Nullfunktion ist in V_1 als auch in V_2 enthalten; V_1 und V_2 sind also nicht leer. Für alle symmetrischen Funktionen $f, g \in V_1$ und für alle λ, μ gilt:

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = (\lambda f + \mu g)(-x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass $f + g$ und λf wieder symmetrisch Funktionen sind, also in V_1 liegen. Folglich ist V_1 ein Untervektorraum. Der Fall V_2 folgt analog.

Sei nun $f \in V$ eine beliebige Funktion mit $f \in V_1$ und $f \in V_2$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Die erste Gleichung gilt, da $f \in V_1$ ist, die zweite gilt, da $f \in V_2$ ist. Zusammen erhält man $f(x) = -f(x)$, also $f(x) + f(x) = 2f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $f = 0$, d.h. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

b) Für ein beliebiges Element $f \in V$, seien die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad f_2(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Wegen

$$f_1(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_1(x) \quad \text{und} \quad f_2(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_2(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f_1 \in V_1$ und $f_2 \in V_2$, und wegen

$$(f_1 + f_2)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f = f_1 + f_2$. Dies zeigt, dass jedes Element aus V als Summe eines Elementes aus V_1 und eines Elementes aus V_2 geschrieben werden kann.

c) $E = \{1, x^2, x^4 \dots\} \subset V_1$ ist eine linear unabhängige Menge (wegen dem Fundamentalsatz der Algebra). Analog, $O = \{x, x^3, x^5 \dots\} \subset V_2$ ist linear unabhängig.

8. Alle drei Vektoren erfüllen $x_2 = \frac{x_1+x_3}{2}$. Die Abbildung $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 - 2x_2$ bildet sie auf Null ab.
   f ist nicht trivial, da $f(1, 0, 0) = 1 \neq 0$.