Lösung: Serie 13

1. Durch Anwenden des Gaussverfahrens erhält man

$$\begin{aligned} \det A_1 &= -89, & \det A_2 &= 2, \\ \det A_3 &= -4, & \det A_4 &= 0 \\ \det A_5 &= 24, & \det A_6 &= 55. \end{aligned}$$

Zum Beispiel,

$$\begin{aligned} \det(A_6) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{55}{13} \end{pmatrix} = 55. \end{aligned}$$

2. **a)** $V(x_1) = \det\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1$, und $V(x_1, x_2) = \det\begin{pmatrix}1 & x_1 \\ 1 & x_2\end{pmatrix} = x_2 - x_1$.

b) Die Gleichung folgt durch Subtrahieren der ersten Zeile von den anderen.

c)

$$V(x_1, \dots, x_n) = \det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1}\end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix}x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1}\end{pmatrix}$$

durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Weiters, wir multiplizieren die i-te Spalte mit $-x_1$ und addieren sie auf die $(i+1)$-te Spalte, für $i = n-1, n-2, \dots, 1$.

$$V(x_1, \dots, x_n) = \det\begin{pmatrix}x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 & \dots & x_2^{n-2} - x_2^{n-3}x_1 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_nx_1 & \dots & x_n^{n-2} - x_n^{n-3}x_1 & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1\end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix}x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \dots & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \dots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} & (x_n - x_1)x_n^{n-2}.\end{pmatrix}$$

Die Linearität der Determinante ergibt nun

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_1) \cdots (x_2 - x_1) V(x_2, \dots, x_n),$$

wie gewünscht.

d) Wir führen eine Induktion über n durch und starten bei
$\underline{n = 1}$: $V(x_1) = 1 = \prod_{1 \le i < j \le 1}(x_j - x_i)$ (das leere Produkt).

Angenommen, $V(x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \le i < j \le n-1}(x_j - x_i)$ für ein $n \ge 1$ und alle $x_1, x_2, \dots x_n$. Mithilfe von c) und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n) &= (x_n - x_1) \cdots (x_2 - x_1) V(x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_n - x_1) \cdots (x_2 - x_1) \prod_{2 \le i < j \le n}(x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.
Also die Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Durch Addieren der ersten $n-1$ Spalten zur letzten Spalte, erhält man eine Matrix die in der letzten Zeile den Eintrag $(b+(n-1)a)\cdot(1,\dots,1)^T$ hat. Durch Herausziehen des Faktors $(b+(n-1)a)$ und Subtrahieren des a-fachen der letzten Spalte von allen anderen Spalten erhält man eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen auf den Diagonalen $b-a,\dots,b-a,1$. Es folgt

$$\det(A_n) = (b+(n-1)a)\det\begin{pmatrix} b-a & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b-a & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}\,.$$

Alternativ kann man die Behauptung induktiv beweisen. Sei B_n die $n\times n$ Matrix

$$B_n := \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Behauptung. $\det(B_n) = (b-a)^{n-1}a$.

Beweis. Wir verwenden Induktion. Wegen $B_1 = (a)$ gilt die Aussage für $n=1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n\geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von B_{n+1} erhält man die Matrix

$$B'_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von B'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\det(B_{n+1}) = \det(B'_{n+1}) = (b-a)\det(B_n) \overset{\text{IV}}{=} (b-a)^n a\,.$$

□

Behauptung. $\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b+(n-1)a\big)a$.

Beweis. Wir verwenden Induktion über n. Wegen $A_1 = (b)$ gilt die Aussage für $n=1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n\geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von A_{n+1} erhält man die Matrix

$$A'_{n+1} := \begin{pmatrix} b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von A'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\begin{aligned}\det(A_{n+1}) &= (b-a)\det(A_n) + (-1)(a-b)\det(B_n)\\ &\overset{\text{IV}}{=} (b-a)^n\big(b+(n-1)a\big)a + (b-a)^n a\\ &= (b-a)^n(b+na).\end{aligned}$$

Die Aussage gilt also auch für den Fall $n+1$. $\square$

4. Wir führen Induktion über n durch. Sei $A = (a_{ij})$.
Induktionsanfang. Sei $n = 1$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & B \end{pmatrix} = a_{11}\det(B)$$

durch Entwicklung nach der ersten Zeile.
Angenommen, die Formel gilt für $n-1$ und für alle $m \in \mathbb{N}$. Entwicklung nach der ersten Zeile (*) ergibt

$$\det\begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix} =$$
$$\overset{(*)}{=} a_{11}\begin{pmatrix} A^{(1,1)} & 0_{n-1,m} \\ 0_{m,n-1} & B \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} A^{(1,2)} & 0_{n-1,m} \\ 0_{m,n-1} & B \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{pmatrix} A^{(1,n)} & 0_{n-1,m} \\ 0_{m,n-1} & B \end{pmatrix}$$
$$\overset{(\text{IV})}{=} a_{11}\det(A^{(1,1)})\det(B) - a_{12}\det(A^{(1,2)})\det(B) + \cdots + (-1)^{n+1}\det(A^{(1,n)})\det(B) =$$
$$\overset{(*)}{=} \det(A)\det(B).$$

5. Es gilt $B = M^{-1}AM$, wobei M eine Basiswechselmatrix (und damit invertierbar) ist. Nach der Multiplikativität der Determinante,

$$\det(B) = \det\left(M^{-1}\right)\det(A)\det(M) = \det(A)\det\left(M^{-1}\right)\det(M) = \det(A),$$

was zu beweisen war.

6. **a)** Die $n \times n$-Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
ist schiefsymmetrisch.

b) Wir zeigen, dass alle schiefsymmetrischen Matrizen in $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ mit n ungerade Determinante null haben: Sei A eine solche Matrix. Dann gilt

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n\det(A) = -\det(A)$$

und somit $\det(A) = 0$. Beim zweiten Gleichheitszeichen haben wir verwendet, dass A schiefsymmetrisch ist und beim letzten Gleichheitszeichen, dass n ungerade ist.

c) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist ein Beispiel einer schiefsymmetrischen 2×2-Matrix mit Determinante nicht null.