Serie 2 - Komplexe Zahlen I

1. *(Induktion)*

a) Zeigen Sie die **Ungleichung von Bernoulli**: Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$3|n^3 - n,$$

wobei $a|b$ bedeutet, dass b durch a teilbar ist, also dass $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$.

2. Skizzieren Sie die folgenden Bereiche der komplexen Ebene!

a) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 3, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \frac{|z+2-2\mathbf{i}|}{|z+\mathbf{i}|} = 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-3| \geq 1 \wedge |z-1-\mathbf{i}| < 4\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-\mathbf{i}+3| \geq |z+2\mathbf{i}| \wedge \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0\}$

3. Lösen Sie folgende Gleichungen in $z \in \mathbb{C}$ und stellen Sie die Lösung(en) in Normalform dar.

a) $z^2 = \mathbf{i}$

b) $\frac{z+3-2\mathbf{i}}{z-5-\mathbf{i}} = 3\mathbf{i}$

c) $z^2 + (13+\mathbf{i})z + 44 + 8\mathbf{i} = 0$

d) $z = \bar{z}$

4. *(Dreiecksungleichung)* Für die komplexen Zahlen gilt die sogenannte **Dreiecksungleichung**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Betrachten Sie nun den Beweis und erklären Sie bei jedem Schritt, wieso diese Umformung korrekt ist.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &\overset{(1)}{=} (z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1+z_2}) \\
&\overset{(2)}{=} z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2} \\
&\overset{(3)}{=} |z_1|^2+2\operatorname{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})+|z_2|^2 \\
&\overset{(4)}{\leq} |z_1|^2+2|z_1\cdot\overline{z_2}|+|z_2|^2 \\
&\overset{(5)}{=} |z_1|^2+2|z_1|\cdot|z_2|+|z_2|^2 \\
&\overset{(6)}{=} (|z_1|+|z_2|)^2
\end{aligned}$$

und durch Wurzelziehen erhalten wir $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. $\square$

5. Repetition. Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

a) $(\sqrt{x+y}-\sqrt{y-z})(\sqrt{x+y}+\sqrt{y-z})$

b) $\frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}}$

c) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt[3]{a^9}-b\sqrt{16a^2b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

d) $\log_y(10)-\log_y(5)$

e) $2\log_a(4)+\log_b(4)-3\log_a(2)+2\log_b(5)$

f) $2\log_a(3x)+\log_a(3x)+4\log_a(2x)-\frac{1}{2}\log_a(64x^2)$