Aufgabe 9

Johann Bernouille (1667-1748) postullierte folgendes: "Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkt M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kurzester Zeit nach B gelangt". Dies ist das sogennante "Brachystochronenproblem" (vom griechischen: brachystos = kurzester und chronos = Zeit).

Die von Bernouille gesuchte "Bahn" ist überraschenderweise nicht die Verbindungsstreck zwischen A und B, sonder eine Zykloïde, die durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = \tfrac{c^2}{4g}(t - sin(t))$$

$$y(t) = y_0 - x'(t)$$

$0 \leq t \leq t_{max} < 2\pi$ gegeben ist. Wobei die Konstanten c und t_{max} durch der Lage von x_0 und y_0 bestimmt werden.

(a) Eine hohe Anfangskrümung ergibt eine so hohe Anfangsbeschleunigung, so dass eine spätere Abflachung vernachlässigbar ist.
Bei den Bahnradrennen ist analog der schnellste weg nicht der Kürzeste unter durch. Sondern es ist am gunstigsten bis an den oberen Rand der Bahn zu fahren und sich nacher nach unten stürtzen zu lassen. Die Zeit für eine Bahnumrundung kann so bis zu 15% verkürtzt werden.
Die U-Bahn in Glasgow ist so gebaut, dass die Stationen an der Erdoberfläche sind. Die Bahn taucht unter Erde ab und kommt bei der nächsten Station wieder hoch. So wird energie gespart bei der Beschleunigung und beim Abbremsen.

(b) Um t_{max}bestimmen zu können muss man die Nullstellen der Zykloïde finden $\Longrightarrow$y(t)=0

$$y_0 - x'(t) = 0 \Longrightarrow y_0 - \frac{c^2}{4g}(1 - cos(t)) = 0 \Longrightarrow 1 - cos(t) = \frac{4gy_o}{c^2} \Longrightarrow cos(t) = -\frac{4gy_o}{c^2} + 1 \qquad (1)$$

und somit besitzt (1) zwei Lösungen im Intervall $[0, 2\pi[$. Aus (1) kann man ebenfalls lesen, dass

$y_0 = \frac{c^2}{4g}(1 - cos(t))$ gilt. Somit kommt man auf das verhältniss:

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{t - sin(t)}{1 - cos(t)} \qquad (2)$$

Diese Gleichung lässt sich nicht allgemein nach t auflösen. Man müsste ab hier mit numerischen Methoden weiter machen. Daraus lassen sich aber zwei Fallunterscheidungen lesen (Abb. 1):

wenn $\frac{x_0}{y_0} \leq \frac{\pi}{2}$, dann gilt die erste Lösung der Gl. 1

wenn $\frac{x_0}{y_0} > \frac{\pi}{2}$, dann gilt die zweite Lösung der Gl. 1

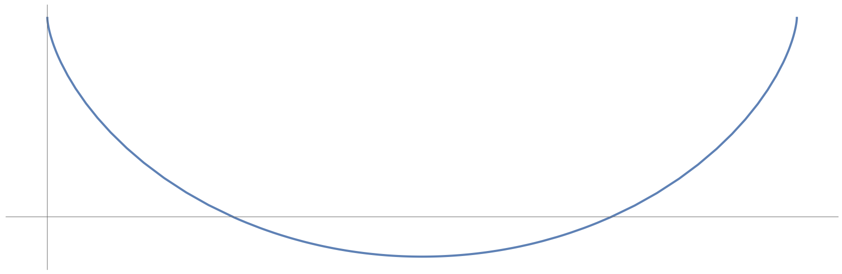


Abb.1: Algemeine Brachystochronenkurve, wenn $\frac{x_0}{y_0} \leq \frac{\pi}{2}$, dann ist der erste Schnittpunkt die Lösung und wenn $\frac{x_0}{y_0} > \frac{\pi}{2}$ dann gilt der zweite Schnittpunkt als Lösung.

(c) Für $\frac{x_0}{y_0} = \frac{\pi}{2}$ ist es möglich Gl. 2 exakt zu lösen. Es gilt:

$\frac{\pi}{2} = \frac{t-sin(t)}{1-cos(t)}$, somit ist $2 = 1 - cos(t)$ und $\pi = t - sin(t)$, durch lösen dieser Gleichungen erhält man: $t = t_{max} = \pi$

Mit diesem verhähltniss ist es möglich die Konstante c eindeutig zu betimmen:

$x(\pi) = x_0 = \frac{\pi}{2} \cdot y_0 = \frac{c^2}{4g}(\pi - sin(\pi)$, die Lösung dieser Gleichung ergibt $c = \sqrt{2gy_0}$

Somit ist die Zykloïde für den Fall $\frac{x_0}{y_0} = \frac{\pi}{2}$ eindeutig bestimmt.
Die Steigung der Kurve ist folgender Weise definiert:

$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{-c^2}{4g} \cdot sin(t)}{\frac{c^2}{4g}(1-cos(t)} = \frac{-sin(t)}{1-cos(t)}$ somit gilt für den Punkt A (t=0) (Anwendung von Bernouille-de l'Hôpital)

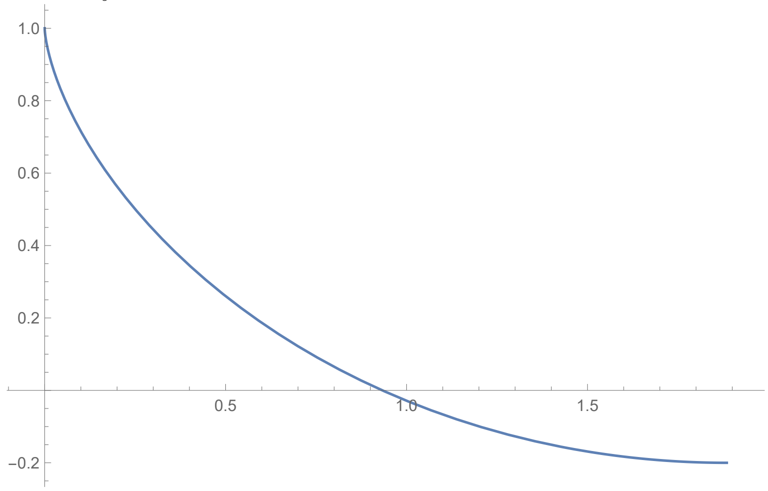
$$\lim_{t \to 0} \frac{-sin(t)}{1-cos(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{-sin(t)}{sin(t)} = -\infty$$

Im Punkt B ($t = \pi$) gilt:

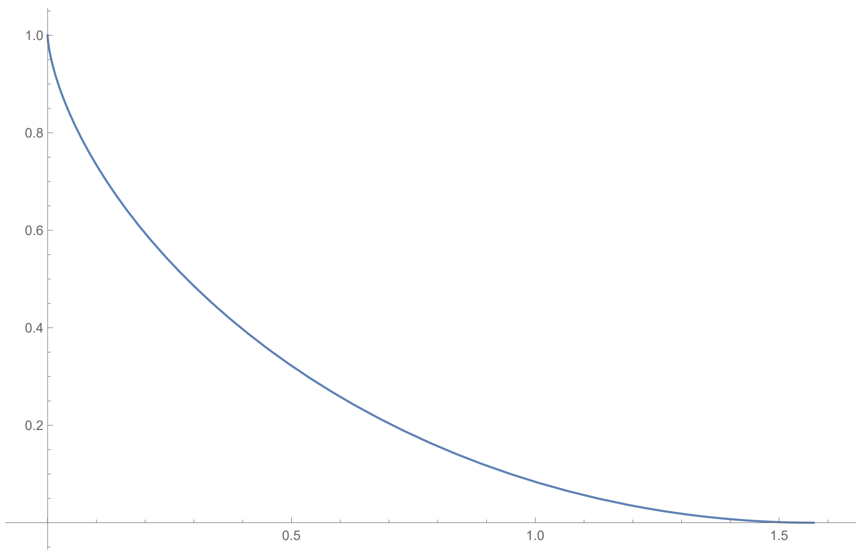
$$\frac{-sin(\pi)}{1-cos(\pi} = \frac{0}{2} = 0$$

(d) Wir setzten y_0=1 und betrachten die drei Fälle

Im Fall $\frac{x_0}{y_0} < \frac{\pi}{2}$ ergibt die Kurve:



Im Fall $\frac{x_0}{y_0} = \frac{\pi}{2}$ ergibt die Kurve:



Im Fall $\frac{x_0}{y_0} > \frac{\pi}{2}$ ergibt die Kurve: