U. Lang
Diego Giovanoli (diegogi)
Lukas Egloff (luegloff)

Analysis Anwendungsübungen 1

Explizite Darstellung einer rekursiven Folge

<u>Theorie</u>

Zahlenfolge:	z.B.: 3, 6, 9, 12, 15,......, a_n
Rekursiv: definiert durch Vorgängerglieder	z.B.: $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_{1=3}$
Explizit: definiert durch n	z.B.: $a_n = 3 \times n$

Mit diesen zwei Darstellung kann man jedes Glied einer gewissen Folge bestimmen. Um zu diesen Darstellungen zu gelangen sucht man in der Folge nach Regelmässigkeiten. Zwei der am leichtesten erkennbaren Regelmässigkeiten sind eine konstante Differenz (arithmetische Folge) und ein konstanter Quotient (geometrische Folge).

<u>Aufgabe</u>

Es geht in dieser Aufgabe darum, wie man aus der rekursiven Darstellung einer Folge eine explizite Darstellung bestimmen kann, mit der sich meistens viel einfacher arbeiten läßt. Wir betrachten die Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \qquad (1)$$

für natürliche Zahlen $n \geq 0$ mit den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

<u>Schritt 1: Die ersten Folgenglieder</u>

$X_0 = 0$	$X_1 = 1$	$X_2 = 1/2$	$X_3 = 3/4$	$X_4 = 5/8$	$X_5 = 11/16$	$X_6 = 21/32$

<u>Schritt 2: Regelmässigkeiten suchen</u>

- Keine Regelmässigkeit der Brüche → Zähler & Nenner getrennt betrachten
-

?	1	2	4	8	16	32

- Nenner: Regelmässigkeit konstanter Multiplikator q = 2 → geometrische Folge
- Explizite Folge der Nenner: $\mathbf{2^{n-1}}$

0	1	1	3	5	11	21

- Man erkennt, dass jede Zahl a_n die Summe aus der letzten Zahl und 2-mal der vorletzten Zahl ist → rekursive Darstellung: $a_n = a_{n-1} + 2\, a_{n-2}$
- Diese Folge heisst Jacobsthal Folge[1] und hat Ähnlichkeiten mit der Fibonacci Folge sie lässt sich explizit Darstellen: $\mathbf{a_n = (2^n - (-1)^n)/3}$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobsthal_number

Dank diesen Erkenntnissen kann man die Zahlenfolge x_n explizit Darstellen

$$\mathbf{X_n = \frac{(2^n - (-1)^n)/3}{2^{n-1}}}$$

Schritt 3: Induktionsbeweis (siehe Tafel)