Anwendungsübung Nr. 10 Rotationskörper auf schiefer Ebene

Ziel der Aufgabe war zu bestimmen, welcher Körper (Voll-, Hohlzylinder und Kugel) bei gleicher Masse schneller eine schiefe Ebene hinunter rollt.

a)

Die Beschleunigung eines Zylinders hängt allein vom Trägheitsmoment ab, da Masse und Abmessungen identisch sind. Das Trägheitsmoment ist die Eigenschaft eines Körpers, einer Rotationsbewegung zu widerstehen.

b) Zylinder vs. Hohlzylinder:

Definition Trägheitsmoment:

Abstand zur Drehachse im Quadrat aufsummiert und über das Volumen integriert.

Bsp: allgemein: $J_Z = \rho \iiint (x^2 + y^2) dz dy dx$ J_x, J_y analog

Für Rot.körper: $J_Z = \rho \iiint r^3 \; dz dr d\varphi$ ($r^3 = r^2 * r$ aus Jacobidet.)

Masse Zylinder:

$$m = \rho V = \rho \pi r^2 h$$

Im Falle des Hohlzylinders ist die gesamte Masse die auf dem Rand verteilt:

$$m = \pi \rho_{Hohlzylinder} h \, (R^2 - r_0^2)$$

$$\rho_{Hohlzylinder} = \frac{m}{\pi h (R^2 - r_0^2)}$$

Daraus ergibt sich:

$$J_{Hohlzylinder} = 2\pi \rho_{Hohlzylinder} h \int_{r0}^{R} r^3 \, dr = 2\pi \rho_{Hohlzylinder} h \, [\frac{r^4}{4}]_{r0}^{R} = 2\pi \rho_{Hohlzylinder} h \, [\frac{R^4}{4} - \frac{r_0^4}{4}]$$

$$= 2\pi \rho_{Hohlzylinder} h \, (\frac{R^2}{2} - \frac{r_0^2}{2}) \, (\frac{R^2}{2} + \frac{r_0^2}{2})$$

$$Wobei \; 2\pi \rho_{Hohlzylinder} h \, (\frac{R^2}{2} - \frac{r_0^2}{2}) = m$$

$$J_{Hohlzylinder} = \frac{1}{2} \, m \, (R^2 + r_0^2)$$

Daraus ergibt sich für den Vollzylinder:

$$J_{Vollzylinder} = \frac{1}{2} \, m \, R^2$$

Da $r_0 = 0$.

Die Dichte der Zylinder ist zwar unterschiedlich ($\rho_{Hohlzylinder} > \rho_{Vollzylinder}$), allerdings ist deren Masse dieselbe und für die Berechnung des Trägheitsmoments ist nur Letztere relevant.

Es ist ersichtlich, dass $\frac{1}{2} m (R^2 + r_0^2) > \frac{1}{2} m R^2$

$$J_{Hohlzylinder} > J_{Vollzylinder}$$

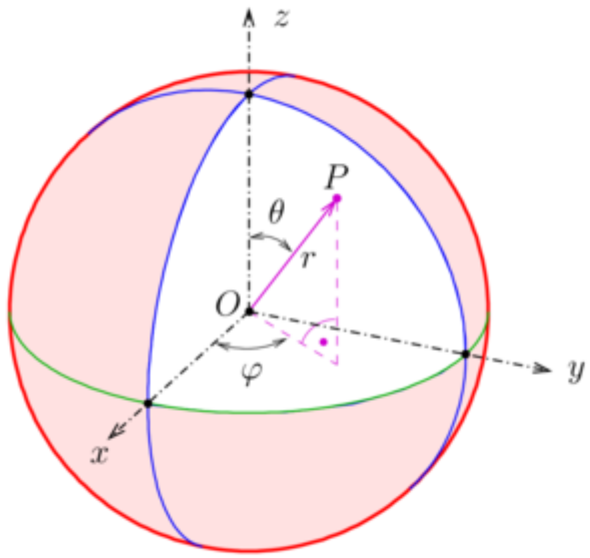
Wir kommen zum Schluss, dass sich der Vollzylinder schneller in Bewegung setzt als der Hohlzylinder.

c) Trägheitsmoment einer Kugel mit Masse m

$$J_{kugel} = \int r_{parallel}^2 \, dm = \rho_{Kugel} \int r_{parallel}^2 \, dV$$

Der Abstand von der z-Achse beträgt: $r_{parallel} = r \sin \theta$

Zum Berechnen des Integrals wird das Volumen in Kugelkoordinaten ausgedrückt, welche r, θ, φ sind.



(1) Bezeichnung einer Kugel mithilfe von Kugelkoordinaten

Anhand der Abbildung kann man erkennen, dass x, y, z wie folgt definiert sind:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

Da wir 3 Unbekannte haben, kann die Aufleitung nach dem Volumen dV so geschrieben werden:

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Daraus ergibt sich dann für das Trägheitsmoment:

$$J = \rho_{Kugel} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Da die Integralgrenzen nicht voneinander abhängig sind kann man r und φ unabhängig von θ ausrechnen.

$$J = \rho_{Kugel} R^5/5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$J = \rho_{Kugel} 2\pi R^5/5 \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta$$

Um nach θ zu integrieren müssen wir eine partielle Integration machen.

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta - \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$$

Mit:

$$u = \sin^2\theta$$

$$v' = \sin\theta$$

Daraus ergibt sich dann:

$$J = \rho_{Kugel} \, \pi R^5 \, \frac{4}{3} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \rho V R^2$$

$$= \frac{2}{5} m R^2$$

Mit $V = \pi R^3 \frac{4}{3}$ und $m = \rho_{Kugel} V$.

Im Vergleich zum Vollzylinder ($J_{Vollzylinder} = \frac{1}{2} m R^2$) ist die Kugel schneller.

Quellen (Stand 1.12.2014):

(1) http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten
http://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4gheitsmoment
http://m.schuelerlexikon.de/phy_abi2011/Traegheitsmomente.htm