Aufgabe 5: Ideale Gasgleichung und Van der Waals-Gleichung

Umkehrbarkeit

Für eine bijektive Funktion (injektiv & surjektiv) gibt es eine eindeutige Umkehrfunktion. Dabei werden der Definitionsbereich der Ausgangsfunktion zum Wertebereich und der Wertebereich zum Definitionsbereich. Für den Graphen bedeutet dies die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

Ideale Gasgleichung

Teilchen im idealen Gas sind punkförmig und beeinflussen einander nicht. Für ein Mol gilt:

$$p \cdot V = R \cdot T \, ,$$

wobei $p = Druck\ [bar],\ V = Volumen\ [cm^3]$, $R = \text{ideale Gaskonstante}\ [\frac{J}{mol \cdot K}]$,
$T = Temperatur\ [K]$.

Definitionsbereich: $\mathbb{R}^+$

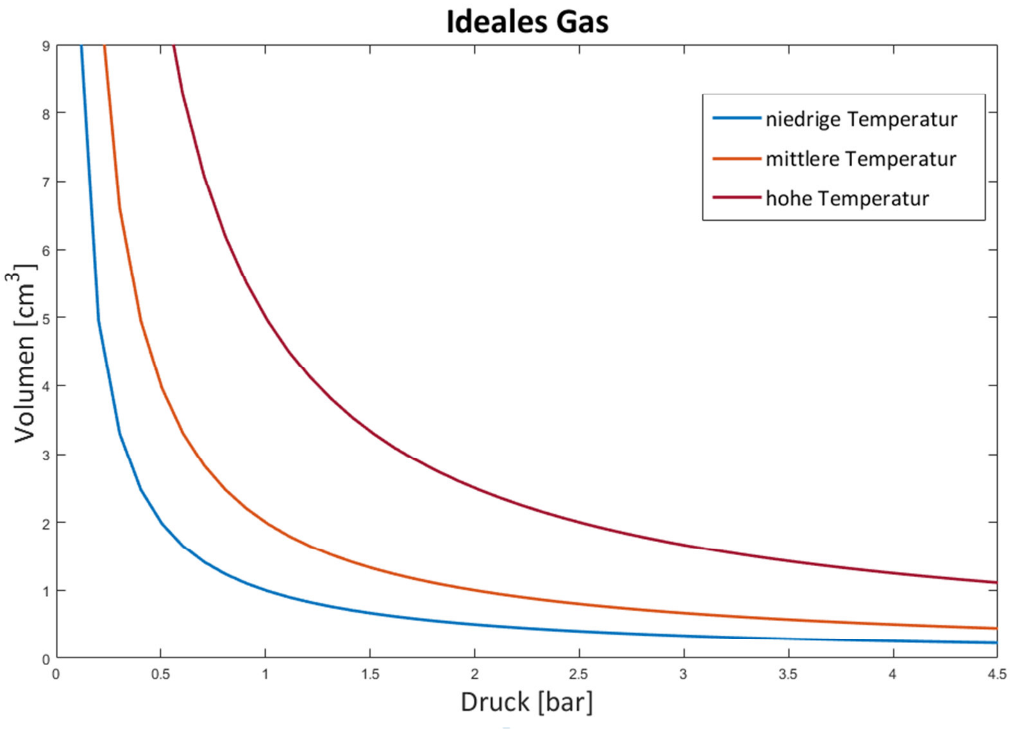

Abbildung 1 Ideales Gas

Van der Waals-Gleichung

Durch Einbeziehen des Volumens der Gasmoleküle und ihrer Wechselwirkung verändert sich die ideale Gasgleichung für ein Mol zu

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = R \cdot T \, .$$

$\frac{a}{V^2} > 0$ beschreibt die Wechselwirkung unter den Gasteilchen und $b > 0$ das Volumen der Gasteilchen. Bei hoher Temperatur spielen b und $\frac{a}{V^2}$ kaum eine Rolle und können daher vernachlässigt werden. Je tiefer die Temperatur, umso grösser die Abweichung von der Hyperbelform. Bei der sogenannten kritischen Temperatur $T_c(V_c/P_C)$ weist die Funktion eine horizontale Wendetangente auf. Unter dieser kritischen Temperatur wird das Gas flüssig.

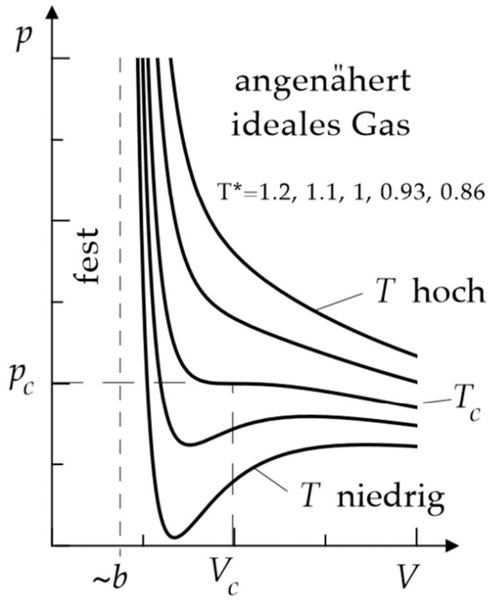

Abbildung 2: Reales Gas, http://www.physik.uzh.ch/~strauman/physik-a/Ergaenzung_VanderWaals.pdf

Lösung der Aufgabe

Ideale Gasgleichung: Wenn $p(V) = \frac{RT}{V}$, dann ist $V = \frac{RT}{P}$. Da die Funktion im Definitionsbereich bijektiv ist, ist sie umkehrbar. Der Definitionsbereich $D_f = (0, \infty)$ wird für f^{-1} zum Wertebereich und der Wertebereich $W_f = (0, \infty)$ wird für f^{-1} zum Definitionsbereich. Am Graphen tauschen die Achsen ihre Plätze, am Aussehen der Kurve verändert sich nichts.

Van der Waals-Gleichung: Wenn $p(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ dann kann der Definitionsbereich analog zum D_f der idealen Gasgleichung gewählt werden. Durch einbeziehen der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Teilchen und ihres Eigenvolumens ist die Funktion nicht mehr injektiv und daher nicht im ganzem D_f umkehrbar.