Anwendungsübungen MATL

Aufgabe 1

Explizite Darstellung einer rekursiven Folge:

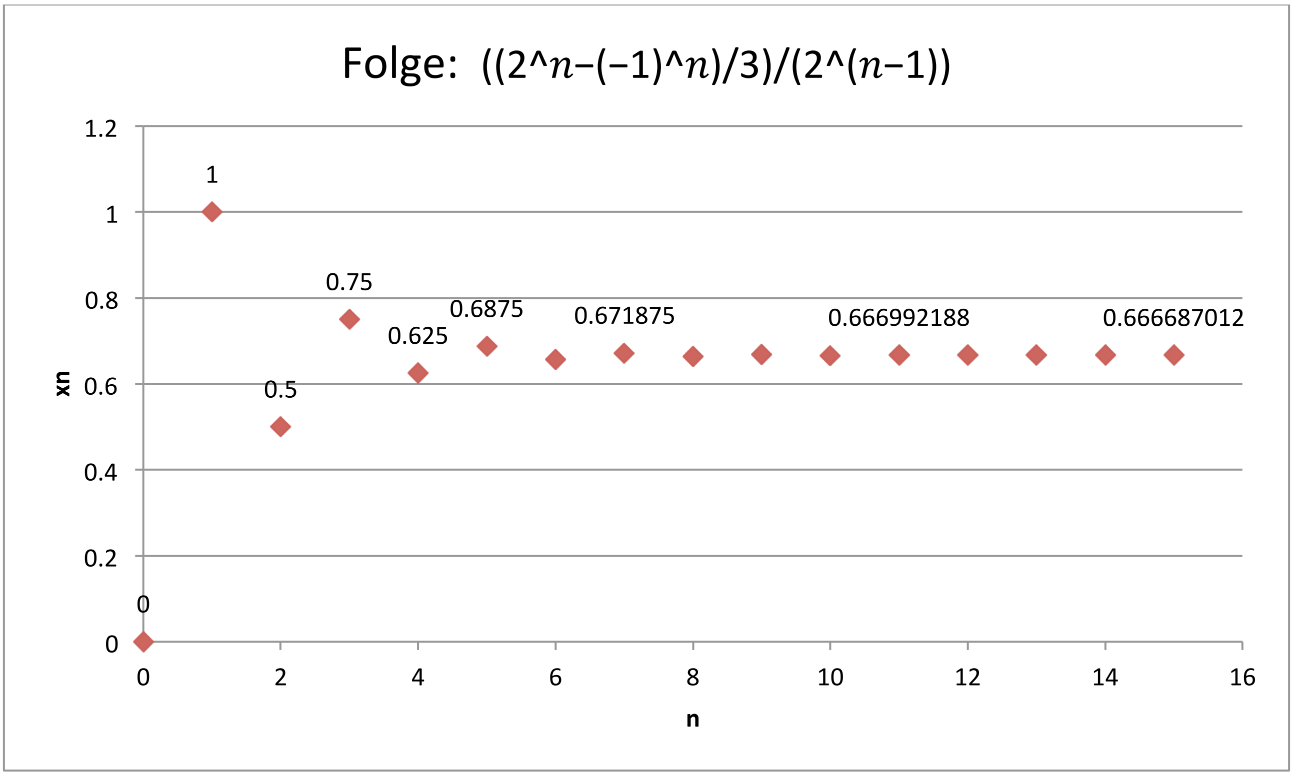
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \\ x_0 = 0, x_1 = 1 \end{cases}$$

Übung:

(a) Graph von der Folge
(b) Verhalten der Folgeglieder und Systematik
(c) Explizite Darstellung der Folge

Lösung:

(a) Die Folge rechnet immer den Durchschnitt der aktuellen und der vorhergehenden Zahl aus. Wie man gut vom Graph sehen kann, die Folge strebt nach dem Wert $\frac{2}{3} = 0,\overline{66}$.



(b) Die ersten Folgeglieder:

$x_0 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}$

$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

$x_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{16}$

$x_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{16}+\frac{5}{8}\right) = \frac{21}{32}$

...

Wenn man nun den Zähler und den Nenner getrennt voneinander betrachtet erhält man diese beiden Folgen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{➢ } a_n \text{ (Zähler): } 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \ldots \\ \text{➢ } b_n \text{ (Nenner): } \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots \end{array}\right\} \quad x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

(c) Die Folgeglieder können daher auch so geschrieben werden:

$x_0 = \frac{0}{\frac{1}{2}}$; $x_1 = \frac{1}{1}$; $x_2 = \frac{1}{2}$ $x_3 = \frac{3}{4}$; ...

Wenn man nur b_n allein betrachtet, kann man leicht bemerken, dass sie eine simple geometrische Folge ist, mit der folgende Vorschrift:

$b_n = 2^{n-1}$ oder $b_n = \frac{2^n}{2}$

Mit ein bisschen mehr Mühe lässt sich auch a_n als explizite Folge darstellen:

$a_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$

- (a_n) heisst Jacobsthal Folge nach dem deutschen Mathematiker Ernst Jacobsthal

Die explizite Darstellung der Folge, die wir suchen, sollte also gleich der Folge a_n durch die Folge b_n sein. Konkret heisst:

$$x_n = \left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right) / (2^{n-1}) = \left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right) / \left(\frac{2^n}{2}\right)$$