Anwendungsübungen: Aufgabe 12

Fibonacci-Zahlen

Elia Inguscio, Marco Rathlef, Roberto Emma

Üblicherweise wird die Erfindung der Fibonacci-Zahlen dem italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa zugeschrieben. Besser bekannt ist er unter dem Namen Fibonacci, der Kurzform von filius (lat. Sohn) Bonacci. In der zweiten Version seines Rechenbuchs *Liber Abacci* (Buch vom Abacus) – die erste Version ist nicht überliefert – taucht folgende Aufgabe auf:

Jemand setzt ein Paar Kaninchen in einen Garten, der auf allen Seiten von einer Mauer umgeben ist, um herauszufinden, wieviele Kaninchen innerhalb eines Jahre geboren werden. Wenn angenommen wird, daß jeden Monat jedes Paar ein weiteres Paar zeugt, und daß Kaninchen zwei Monate nach ihrer Geburt geschlechtsreif sind, wie viele Paare Kaninchen werden dann jedes Jahr geboren?

(a) Finde die Anzahl Kaninchenpaare nach jedem Monat, innerhalb eines Jahres. Was kannst du über das Wachstum aussagen? (Tipp: benutzt schwarze und weiß Kreise, um die geschlechtsreife Paare von den nicht geschlechtsreifen zu unterscheiden)

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

Schreibe die gefundenen Werte auf:

1, 1, 2,_______________________________

Wir definieren die Fibonacci-Folge durch das Rekursionsgesetz

$$a_{n+2} := a_{n+1} + a_n, \forall\, n \geq 0 \,,$$

und den Anfangsbedingungen

$$a_0 := 1 \text{ und } a_1 := 1 \,.$$

(b) Die Folge der Verhältnisse $\frac{an+1}{an}$ der aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen konvergiert. Berechne ihren Grenzwert ϕ aus dem Rekursionsgesetz! Er heißt Goldener Schnitt.

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Gemäß dem Rekursionsgesetz

$$\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_{n+1} \,.\, a_n \;+\; a_n{}^2 - a_{n+1}{}^2 \;=\; 0$$

Setzen wir $a_{n+1} = t$, erhalten wir

$$-t^2 \;+\; a_n \cdot t \;+\; a_n{}^2 \;=\; 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-a_n \pm \sqrt{5a_n{}^2}}{-2} = \frac{a_n \pm a_n\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n \pm a_n\sqrt{5}}{2}}{a_n} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da die ganze Fibonacci-Folge aus positiven Zahlen besteht, ist nur das positive Resultat $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ möglich.

(c) Mithilfe der Lösungstheorie für homogene lineare Differenzialgleichungen kommt man auf Binets Formel:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Beweise diese explizite Formel für den n-ten Term durch Induktion.

Beweis durch Induktion

1. Induktionsstart

Man kontrolliert, dass die Formel für den ersten Term gilt. Für n=0 folgt:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \ \checkmark$$

2. Induktionsbehauptung

Man nimmt für wahr, dass die Formel für den k-ten Term gültig sei.

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

3. Induktionsschritt

Man beweist jetzt, dass, *wenn die Formel für k gilt, sie* *__auch__* *für k+1 gilt.* Da man schon kontrolliert hat, dass die Formel für n=0 gültig ist, folgt dass sie für alle weiteren Terme gelten wird.

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$$

Man weiß, dass es sich eine Fibonacci-Folge handelt, deswegen darf man das folgende Rekursionsgesetz benutzen:

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$$

(Bemerkung: da dieses Gesetz nur für $k+1 \geq 2$ gültig ist, muss man die Formel zuerst für $k+1=1$ überprüfen.

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}-3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \ \checkmark)$$

Somit muss folgendes gelten:

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

Jetzt setzt man, gemäß der Binet-Formel:

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

Man weiß, dass $\phi + 1 = \phi^2$

Die beiden Formen dieser Nummer

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad und \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ergeben somit:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad bzw. \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Damit kommt man auf:

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]$$

Schließlich:

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right] \square$$

(d) Beweise per Induktion, dass $a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 = (-1)^{n+1}$. Folgere für *gerade n*'s mit Hilfe eines Tangens-Additionstheorems daraus die Kuriosität

$$arctan\frac{1}{a_n} + arctan\frac{1}{a_{n+1}} = arctan\frac{1}{a_{n-1}}$$

Hinweis: Beweise zuerst, dass $a_n a_{n+1} + (-1)^{n+1} = a_{n-1}(a_{n+1} + a_n)$.

1. für n=1 $\;2 - 1 = (-1)^2 \ \checkmark$
2. $a_{k+1}a_{k-1} - {a_k}^2 = (-1)^{k+1}$
3. $a_{k+2}a_k - {a_{k+1}}^2 = (-1)^{k+2}$

Wenn k gerade ist, dann folgen:

$$a_{k+2}a_k - {a_{k+1}}^2 = 1$$

und

$$a_{k+1}a_{k-1} - {a_k}^2 = -1.$$

Somit:

$$a_{k+2}a_k - {a_{k+1}}^2 = -\left(a_{k+1}a_{k-1} - {a_k}^2\right)$$

Man benutzt jetzt folgendes:

$$a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$$

$$(a_k + a_k + a_{k-1})(a_k) - (a_k + a_{k-1})^2 = -\left[(a_k + a_{k-1})(a_{k-1}) - {a_k}^2\right]$$

Schließlich:

$${a_k}^2 - a_k a_{k-1} - {a_{k-1}}^2 = {a_k}^2 - a_k a_{k-1} - {a_{k-1}}^2 \quad \square$$

Kuriosität

Man beweist, dass:

$$a_n a_{n+1} + (-1)^{n+1} = a_{n-1}(a_{n+1} + a_n)$$

Durch Substitution von $(-1)^{n+1}$ mit $a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2$ (aus der Formel, die man schon bewiesen hat):

$$a_n a_{n+1} + a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 = a_{n-1}(a_{n+1} + a_n)$$

$$a_n a_{n+1} - {a_n}^2 = a_{n-1}a_n$$

Man teilt alles durch a_n und bekommt die Formel:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

die dem Rekursionsgesetz der Fibonacci-Folge entspricht. √

Jetzt kann man

$$arctan\frac{1}{a_n} + arctan\frac{1}{a_{n+1}} = arctan\frac{1}{a_{n-1}}$$

beweisen.

$$\tan\left(arctan\frac{1}{a_n} + arctan\frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_{n-1}}$$

Man benutzt das Additionstheorem der Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Und erhält so

$$\frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}}{1 - \frac{1}{a_n a_{n+1}}} = \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)a_{n-1} = 1 - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$a_{n-1}\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}\right) + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = 1$$

Wenn alles mal $a_n a_{n+1}$ multipliziert wird, kommt man auf

$$a_{n-1}(a_n + a_{n+1}) + 1 = a_n a_{n+1}$$

Was der vorher bewiesenen Formel entspricht. $\square$