Aufgabe 2 Lösen von nichtlinearen Gleichungen

Einleitung:

$$c_w = \frac{1}{(2 * log_{10}(R\sqrt{c_w})^2}$$

C_w ist als der Widerstandsbeiwert eines Körpers definiert
R ist die durchschnittliche Fließgeschwindigkeit der Strömung (auch als Reynolds-Zahl genannt)

Aufgabe 2a)

Wir wollen wissen, wie groß C_w für eine Strömung mit $R = 10^6$ ist.

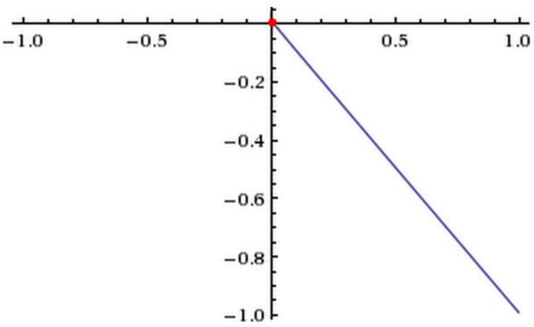
Am Anfang müssen wir die Gleichung in einer Funktion transformieren, die abhängig von x ist. Wir setzen $C_w = x$.

Wir erhalten folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{\left(11.2 + \log_{10}(x)\right)^2} - x$$

Die Funktion ist jetzt definiert und wir können die Nullstellen berechnen. Leider können wir die Nullstelle nicht analytisch berechnen.

Anhand eines Plots können wir näherungsweise feststellen, dass die Nullstelle in der Nähe von Null liegt, aber nicht Null sein kann, da Null nicht im Definitionsbereich liegt (Argument der Log Funktion muss grösser als Null sein).



Aufgabe 2b)

Um die Nullstellen einer nichtlinearen Gleichung zu berechnen, können wir die Methode des Sekanten Verfahrens benutzen.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Wie erhält man diese Formel?

Wie ersetzen:

$$m = \frac{f(X_{n+1}) - f(X_n)}{(X_{n+1}) - (X_n)}$$

Wir kennen die Gleichung einer Gerade:

$$\text{Für } f(x) \leq x \leq f(x_{n+1})$$
$$\Delta x = (x_{n+1} - x_n)$$

$$s(x) = \Delta x * m + f(\Delta x)$$

Da s(x) dieselbe Nullstelle hat wie f(x), setzen wir s(x)=0
Es folgt aus s(x)=ΔX*m+f(ΔX):

$$0 = = (X_{n+1} - X_n) * \frac{f(X_{n+1}) - f(X_n)}{(X_{n+1}) - (X_n)} + f(X_n)$$

$$-f(X_n) = (X_{n+1} - X_n) * \frac{f(X_{n+1}) - f(X_n)}{(X_{n+1}) - (X_n)}$$

$$-f(X_n) * \frac{(X_{n+1}) - (X_n)}{f(X_{n+1}) - f(X_n)} = (X_{n+1} - X_n)$$

$$-f(X_n) * \frac{(X_{n+1}) - (X_n)}{f(X_{n+1}) - f(X_n)} = (X_{n+1} - X_n)$$

$$X_{n+1} = X_n - f(X_n) * \frac{(X_{n+1}) - (X_n)}{f(X_{n+1}) - f(X_n)}$$

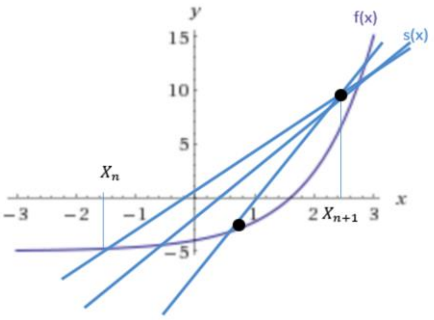
Wir haben die Formel, die wir am Anfang hatten

Aufgabe 2c)

Erstens müssen wir zwei x-Werte wählen, wobei die Nullstelle zwischen diesen x-Werten liegen muss.

Beginnen wir mit 0.001 und 1.

Die Bedeutung dieser Methode ist die Folgende:



Wir wollen die Nullstelle finden. Wir wählen ein x_0=0,001 0 und ein x_1=1. Dann setzen wir diese Werte in die Formel.

X_1=0,001 f(X_1)= 0,0138721...
X_2=1 f(X_2)= -0,9920
Wir setzen X_1, X_2 , f(X_1), f(X_2) in die folgende Formel ein:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Und erhalten dadurch:
X_3≈0,014706.... Unser x_{n+1}

Wir finden dann einen neuen Wert. Nennen wir diesen Wert x_2. Wir haben dann fünf Werte: x_0, x_1, x_2, f(x_0) und f(x_1) und setzen Sie in unsere Formel ein.

n	X_n	$F(X_n)$
x_1	0.001	0.0138721
x_2	1	-0.99202
x_3	0.012354	-0.114101
x_4	0.0096308	0.0022598
x_5	0.0114675	-0.10517
x_6	0.01184	-0.00....
...	...	

Nachdem wir das Sekantenverfahren angewendet haben (mit 0,001 und 1 als Anfangswerte), finden wir heraus, dass die Nullstelle gegen 0.116... strebt.