Radioaktiver Zerfall

Ueli Töpfer, Maurice Tschamper, Sabrina Kistler

Radioaktives Material besteht aus Teilchen, die nach einer gewissen Zeit zerfallen und dabei Strahlung aussenden. Man kann zwar nicht sagen, welches Teilchen wann zerfällt, aber dafür weiss man, wie viele Teilchen durchschnittlich pro Zeiteinheit zerfallen. Generell gilt: je mehr radioaktive Teilchen vorhanden sind, desto mehr zerfallen auch pro Zeiteinheit. Wir bezeichnen im folgenden die Anzahl radioaktiver Teilchen einer Probe in Abhängigkeit der Zeit mit $n(t)$. Angenommen, 5 Tage nach dem Fund einer radioaktiven Probe hat man noch $N > 0$ radioaktive Teilchen und zum Zeitpunkt des Fundes zerfielen $n_0 > 0$ Teilchen pro Tag.

a) Welche Eigenschaften muss die Funktion $n(t)$ haben? Skizze.

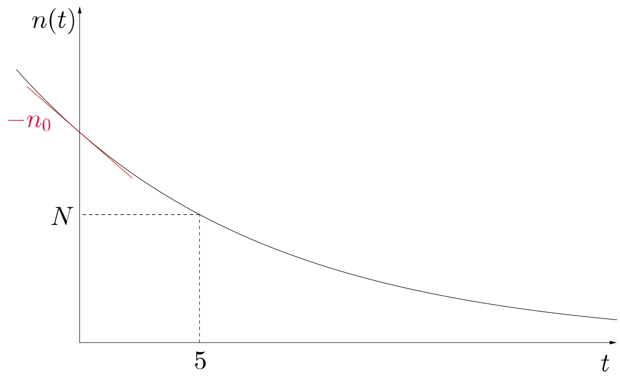

Abbildung 1: Der Graph hat die Steigung n_0 bei $x = 0$ und bei $t = 5$ ist $n(5) = N$

b) Gib eine obere Schranke für die Anzahl radioaktiver Teilchen zum Zeitpunkt des Fundes der Probe an. Was hat das mit dem Mittelwertsatz zu tun?

$$n(0) < N + 5n_0$$

Die Steigung im Punkt $(5, N)$ ist sicher kleiner als n_0, somit definiert man auf eine obere Schranke für $n(0)$. Dies kann man auch mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erklären. Die Sekantensteigung zwischen 0 und 5 entspricht in mindestens einem Punkt $0 < t < 5$ der Tangentensteigung von $n(t)$. Diese ist sicher immer kleiner als n_0.

Man weiss, dass die Zerfallsgeschwindigkeit der Teilchen (Änderung der Anzahl radioaktiver Teilchen pro Zeiteinheit) proportional zur Teilchenanzahl ist.

c) Drücke den letzten Satz durch eine Gleichung aus.

$$n(t) \sim \frac{\Delta n}{\Delta t} \Rightarrow n(t) \sim \frac{dn}{dt}$$

$$n(t) = k\frac{dn}{dt}, \quad k \text{ eine Konstante mit } k \in \mathbb{R}$$

d) Bestimme $n(t)$ aus der Gleichung und überprüfe (a). Die Gleichung ist auf zwei Arten lösbar.

1) Variablenseparation

$$n(t) = k\frac{dn}{dt}$$

$$\int \frac{1}{k}dt = \int \frac{1}{n}dn \Longleftrightarrow \tilde{c} + \frac{t}{k} = \ln(n) \Longleftrightarrow e^{\tilde{c}}e^{\frac{t}{k}}$$

$$n(t) = Ce^{\frac{t}{k}}$$

2) Lösung einer linearen homogenen Diff.Gleichung 1. Ordnung, mit Hilfe der Formelsammlung

$$\frac{dn}{dt} - \frac{1}{k}n(t) = 0 \longrightarrow n(t) = Ce^{\frac{1}{k}t}$$

Mit Hilfe der Startbedingung $n'(0) = n_0$ lässt sich nun noch C durch k ausdrücken:

$$n_0 = \frac{1}{k}Ce^{\frac{0}{k}} = \frac{C}{k} \longrightarrow C = kn_0 \quad \text{und damit} \quad n(t) = kn_0e^{\frac{1}{k}t}$$

e) Berechne die Halbwertszeit des radioaktiven Materials (das ist die Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen radioaktiven Teilchen noch nicht zerfallen ist).

$$n(0) = 2n(T_{\frac{1}{2}}) \longleftrightarrow e^{\frac{1}{k}0} = 2e^{\frac{1}{k}T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{\frac{1}{k}T_{\frac{1}{2}}} \longleftrightarrow -\ln(2) = \frac{1}{k}T_{\frac{1}{2}}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = -k\ln(2)$$

Damit können wir k mit $T_{\frac{1}{2}}$ ausdrücken, dies ergibt für die Funktion:

$$n(t) = -n_0\frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln(2)}e^{-\frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}t}$$