Aufgabe 9 Brachystochronenproblem

(a)

Die Zykloide ist die schnellste Kurve. Das liegt daran, dass zu Beginn der Massepunkt eine grössere Beschleunigung hat als auf einer geraden Kurve. Der Weg der geraden Kurve ist zwar kürzer als bei der Zykloide, aber der Massepunkt braucht dafür eine längere Zeit. Die Zykloide hat das ideale Gleichgewicht zwischen der Beschleunigung und dem Weg. Dieses Prinzip kommt beispielsweise bei Halfpipes oder Achterbahnen zum Zug.

(b)

$$x(t) = \frac{c^2}{4g}(t - \sin(t))$$

$$y(t) = y_0 - \frac{c^2}{4g}(1 - \cos(t))$$

c und t sind Konstanten, die vom Verhältnis von x_0 und y_0 abhängig sind. In der Parameterdarstellung ist es schwierig, c und t_{max} zu sehen. Um in die explizite Form zu kommen, muss man nach t auflösen. Die explizite Form wird aufgrund der Abhängigkeiten dabei sehr komplex und es wird noch schwieriger, damit zu rechnen.

(c)

Durch Umformen von y(t) erhält man leicht

$$y_0 = \frac{c^2}{4g}(1 - \cos(t))$$

Wir setzen

$n = \frac{x(t)}{y_0}$, woraus folgt

$n = \frac{\frac{c^2}{4g}(t-\sin(t))}{\frac{c^2}{4g}(1-\cos(t))} = \frac{t-\sin(t)}{(1-\cos(t))}$, wodurch wir in der impliziten Schreibweise dargestellt

$t - \sin(t) - n(1 - \cos(t)) = 0$ erhalten.

Da $\frac{x_0}{y_0} = \frac{\pi}{2}$ ist, folgt $t - \sin(t) - \frac{\pi}{2}(1 - \cos(t)) = 0.$

Um t_{max} zu erhalten bilden wir die erste Ableitung:

$(1 - \cos(t)) - \frac{\pi}{2}\sin(t) = 0,$ woraus sich $\boldsymbol{t_{max} = \pi}$ ablesen lässt.

Um die Konstante c für das Verhältnis $\frac{x_0}{y_0} = \frac{\pi}{2}$ zu erhalten, setzen wir t_{max} in x(t) ein und setzen mit $\frac{\pi}{2}y_0$ gleich, da $x(t_{max}) = x_0$. Anschliessend lösen wir nach c auf:

$\frac{\pi}{2}y_0 = \frac{c^2}{4g}(\pi - \sin(\pi)) = \frac{c^2}{4g}\pi,$ da $\sin(\pi) = 0$ ist und somit

$c^2 = \frac{4g}{2}\, y_0$ und $\boldsymbol{c = \sqrt{2gy_0}}$.

Die Steigung im Punkt A=(0,y_0) lässt folgendermassen abschätzen: Da $\frac{\partial y(x)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y(t)}{\partial t}}{\frac{\partial x(t)}{\partial t}}$ gilt, folgt $m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

Für t gegen 0 ist: $\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \infty.$

Analog für *m* im Punkt B=(x_0,0):

$\lim_{t\to \pi} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to \pi} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to \pi} \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} = 0.$

(d)

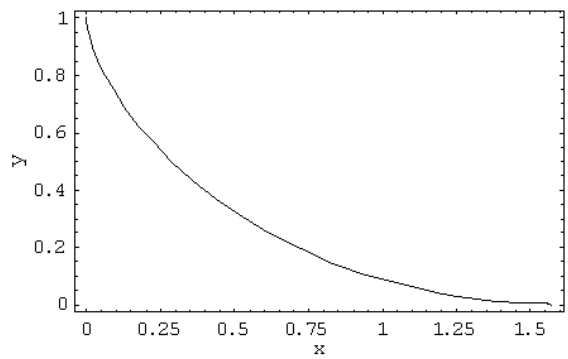

BILD 1: $h = 1,\ \eta = \pi/2$

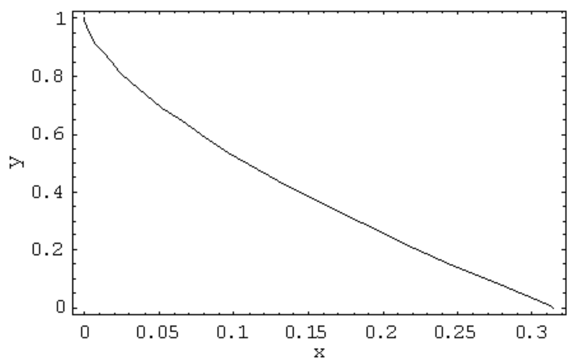

BILD 2: $h = 1,\ \eta = \pi/10 < \pi/2$

Bild 1 Das Verhältnis (hier mit n angegeben) von x_0/y_0 ist genau π/2. In der Darstellung ist x_0 π/2, y_0 ist 1. y_0 ist mit h bezeichnet. Die Steigung im Punkt B beträgt 0 (siehe Aufgabe c).

Bild 2 Das Verhältnis (hier mit n angegeben) von x_0/y_0 ist kleiner als π/2. In der Darstellung ist x_0 π/10, y_0 ist 1. Y_0 ist mit h bezeichnet. Die Kurve ist ein Bruchteil der Zykloide. Somit hat die Kurve im Punkt B eine negative Steigung.

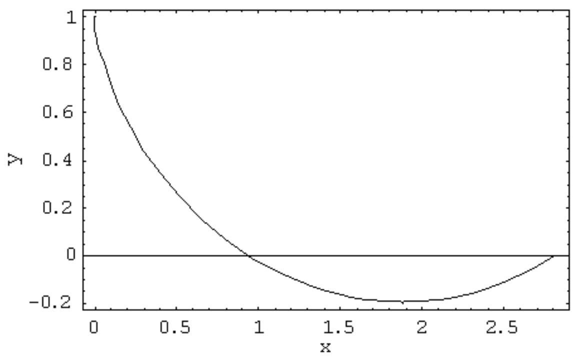

BILD 3: $h = 1,\ \eta = (9/10)\pi > \pi/2$

Bild 3 Das Verhältnis (hier mit n angegeben) von x_0/y_0 ist grösser als π/2. In der Darstellung ist x_0 9π/10, y_0 ist 1. Y_0 ist mit h bezeichnet. Der tiefste Punkt der Kurve liegt unter dem Endpunkt B. Somit hat die Kurve im Punkt B eine positive Steigung.

Quelle Bild 1-3 [http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=353&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.ch%2F (02.11.2015; 16:03)