1.1. Induktionsbeweise

(a) *Verankerung.* Die Behauptung ist richtig für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 1(1+1)\frac{3}{3} = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

Induktionsannahme. Wir nehmen an, die Behauptung gilt für gewisses $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Induktionsschritt. Wir zeigen, dass die Gültigkeit der Behauptung für $n+1$ aus der Induktionsannahme folgt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= (n+1)(n+2) + \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
&= (n+1)(n+2) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3} && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big((n+1)+2\big)}{3}.
\end{aligned}$$

Dies beweist den Schritt $n \to n+1$. Die Behauptung ist somit für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

(b) *Verankerung.* Die Behauptung ist richtig für $n = 0$, denn

$$\forall x > -1: \quad (1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x.$$

Induktionsannahme. Wir nehmen an, die Behauptung gilt für gewisses $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\forall x > -1: \quad (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Induktionsschritt. Wir folgern die Aussage für $n+1$. Sei $x > -1$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Ungleichung in der zweiten Zeile wegen $(1+x) > 0$ korrekt ist. Damit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Der Schritt von $k = 1$ zu $k+1 = 2$ ist falsch:

Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das verbleibende Pferd zwar von einer Farbe, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.

1.2. nochmal Induktion

(a) Wir bezeichnen die n-te Zahl dieser Folge mit a_n, also

$$a_n = n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}.$$

Wir berechnen die ersten paar Werte um die explizite Formel zu erraten:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_3 = 6, \qquad a_4 = 10, \qquad a_5 = 15, \qquad a_6 = 21.$$

Wir beobachten

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + 2, \quad a_3 = a_2 + 3, \quad a_4 = a_3 + 4, \quad a_5 = a_4 + 5, \quad a_6 = a_5 + 6.$$

Somit vermuten wir, dass

$$a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Verankerung. Die Behauptung gilt für $n = 1$, denn $a_1 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Induktionsannahme. Es gelte $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ für gewisses $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (n+1)^2 - n^2 + (n-1)^2 + \ldots + (-1)^n \\
&= (n+1)^2 - \left(n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\right) \\
&= (n+1)^2 - a_n \\
&= (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Verankerung.* Die Behauptung gilt für $n = 1$, denn

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Induktionsannahme. Die Behauptung gelte für gewisses $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Induktionsschritt. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j(j+1)} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{n}{n+1} && \text{(Induktionsannahme)}\\ &= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=\frac{(n+1)}{(n+1)+1}.\end{aligned}$$

Bemerkung. Man kann diese Formel auch direkt herleiten:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\Big)\\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ &= 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

1.3. Negationen

(a) Es sei A die Aussage von Alfons, B die von Boris, C die von Claus und D die von Dieter. Dann gilt $D=\neg C$ und somit ist von den Aussagen C und D stets genau eine wahr und genau eine falsch.

Falls von allen Aussagen genau eine wahr ist, müssen A und B falsch sein, das heisst Boris ist der Täter. Das bedeutet auch dass Claus nicht der Täter ist, also ist wie gefordert A auch falsch. Umgekehrt, falls von allen Aussagen genau eine falsch ist, müssen A und B wahr sein, das heisst Claus ist der Täter.

Alternative. Wir fassen den Wahrheitsgehalt der Aussagen, abhängig davon wer der wahre Täter ist in einer Tabelle zusammen:

Täter:	A	B	C	D
Alfons	f	w	f	w
Boris	f	f	f	w
Claus	w	w	f	w
Dieter	f	w	w	f

Falls genau eine Aussage falsch (f) ist, muss Claus der Täter sein. Falls genau eine Aussage wahr (w) ist muss Boris der Täter sein.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\neg\Big(\exists k \in \mathbb{N}\ \ \forall n > k : f(n) \leq \tfrac{1}{2}\Big) &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \ \neg\Big(\forall n > k : f(n) \leq \tfrac{1}{2}\Big)\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \ \exists n > k : \neg\Big(f(n) \leq \tfrac{1}{2}\Big)\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \ \exists n > k : f(n) > \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.4. De Morgansche Gesetze

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}(A \cap B)^{\mathsf{c}} &= \{x \in X \mid \neg(x \in A \cap B)\}\\ &= \{x \in X \mid \neg((x \in A) \wedge (x \in B))\}\\ &= \{x \in X \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}\\ &= \{x \in X \mid \neg(x \in A)\} \cup \{x \in X \mid \neg(x \in B)\} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B)^{\mathsf{c}} &= \{x \in X \mid \neg(x \in A \cup B)\}\\ &= \{x \in X \mid \neg((x \in A) \vee (x \in B))\}\\ &= \{x \in X \mid \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}\\ &= \{x \in X \mid \neg(x \in A)\} \cap \{x \in X \mid \neg(x \in B)\} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}.\end{aligned}$$

(b) Ferner gilt

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right)^{\mathsf{c}} &= \{x \in X \mid \forall i \in J : x \in A_i\}^{\mathsf{c}}\\ &= \{x \in X \mid \neg(\forall i \in J : x \in A_i)\}\\ &= \{x \in X \mid \exists i \in J : \neg(x \in A_i)\} = \bigcup_{i \in J} A_i^{\mathsf{c}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)^{\mathsf{c}} &= \{x \in X \mid \exists i \in J : x \in A_i\}^{\mathsf{c}}\\ &= \{x \in X \mid \neg(\exists i \in J : x \in A_i)\}\\ &= \{x \in X \mid \forall i \in J : \neg(x \in A_i)\} = \bigcap_{i \in J} A_i^{\mathsf{c}}.\end{aligned}$$