2.1. Abbildungen

(a) Es existiert eine Bijektion $\{1,2,3\} \to \{3,6,9\}$, da beide Mengen gleich viele Elemente enthalten. Beispielsweise ist folgende Abbildung bijektiv.

$$\begin{aligned} f\colon \{1,2,3\} &\to \{3,6,9\} \\ n &\mapsto 3n. \end{aligned}$$

Da die Menge $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ nur 4 Elemente enthält, hat auch ihr Bild unter einer Funktion g maximal 4 Elemente. Folglich kann keine surjektive Abbildung nach $\{\mathtt{A}, \mathtt{10}, \mathtt{K}, \mathtt{D}, \mathtt{B}, \mathtt{9}, \mathtt{8}, \mathtt{7}\}$ existieren. Eine injektive Abbildung existiert, zum Beispiel

$$\begin{aligned} g\colon \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\} &\to \{\mathtt{A}, \mathtt{10}, \mathtt{K}, \mathtt{D}, \mathtt{B}, \mathtt{9}, \mathtt{8}, \mathtt{7}\} \\ \diamondsuit &\mapsto \mathtt{A} \\ \heartsuit &\mapsto \mathtt{D} \\ \spadesuit &\mapsto \mathtt{9} \\ \clubsuit &\mapsto \mathtt{K}. \end{aligned}$$

Die Menge $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ hat mehr Elemente als $B = \{0,2,4,6,8\}$ und somit kann es keine Injektion $A \to B$ geben. Eine surjektive Abbildung existiert, etwa

$$\begin{aligned} h\colon \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} &\to \{0,2,4,6,8\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 2n & \text{falls } 0 \le n \le 4, \\ 0 & \text{falls } 5 \le n \le 8. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) A ist *nicht* Graph einer Funktion $[a,b] \to [c,d]$, da jedem Argument in $[a,b]$ nur einen Funktionswert zugeordnet werden darf.

B ist Graph einer Funktion $[a,b] \to [c,d]$. Die Funktion ist bijektiv, denn jeder Wert im Intervall $[c,d]$ wird genau einmal angenommen.

C ist Graph einer Funktion $[a,b] \to [c,d]$. Die Funktion ist nicht surjektiv, denn nicht alle Werte in $[c,d]$ werden angenommen. Die Funktion ist nicht injektiv, denn manche Werte werden mehrfach angenommen.

D ist Graph einer Funktion $[a,b] \to [c,d]$. Die Funktion ist nicht surjektiv, denn nicht alle Werte in $[c,d]$ werden angenommen. Die Funktion ist injektiv, denn kein Wert wird mehrfach angenommen.

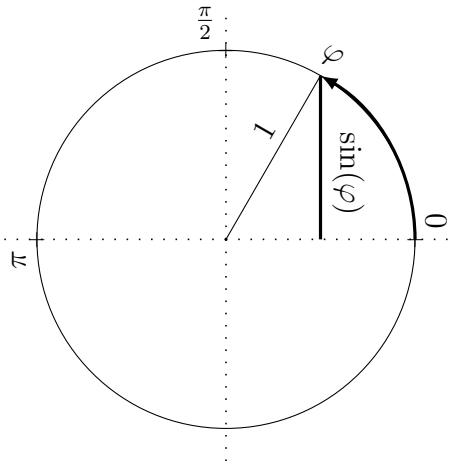
E ist Graph einer Funktion $[a,b] \to [c,d]$. Die Funktion ist surjektiv, denn alle Werte in $[c,d]$ werden angenommen. Die Funktion ist nicht injektiv, denn manche Werte werden mehrfach angenommen.

F ist *nicht* Graph einer Funktion $[a,b] \to [c,d]$, denn manche Argumente in $[a,b]$ haben keinen Funktionswert.

(c) Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon [0,\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1] \qquad g\colon [0,\pi] \to [0,1] \qquad h\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$$
$$\varphi \mapsto \sin(\varphi), \qquad \varphi \mapsto \sin(\varphi), \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x.$$

Anhand der Definition des Sinus am Einheitskreis sehen wir, dass f alle Werte in $[0,1]$ genau einmal annimmt. Daraus schließen wir sofort, dass f injektiv aber nicht surjektiv nach $[-1,1]$ abbildet. Analog schließen wir, dass g surjektiv aber nicht injektiv ist. Somit sind weder f noch g bijektiv.



Die Exponentialfunktion h ist streng monoton steigend und damit injektiv. Definiert auf $\mathbb{R}$ werden alle positiven reellen Zahlen als Werte angenommen, somit ist h auch surjektiv. Folglich ist h bijektiv.

2.2. Bild und Urbild

(a) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ gilt

$$\begin{aligned} f\Big([-1,1]\Big) &= \{x^2\,;\ x \in [-1,1]\} = [0,1], \\ f^{-1}\Big(\{-1\}\Big) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 = -1\} = \emptyset, \\ f^{-1}\Big([0,1]\Big) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 \in [0,1]\} = [-1,1]. \end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht injektiv, denn $f(-2) = 4 = f(2)$ aber $-2 \neq 2$. Somit ist f auch nicht bijektiv und damit auch nicht auf $\mathbb{R}$ invertierbar.

Bemerkung. Die Einschränkung von f auf nicht-negative reelle Zahlen ist injektiv und somit invertierbar. Die Umkehrfunktion $(f|_{[0,\infty[})^{-1} = \sqrt{\cdot}$ heisst „positiver Zweig der Quadratwurzel“. Genauso gut, aber weniger gebräuchlich ist die Einschränkung von f auf die nicht-positive reelle Zahlen mit dem „negativen Zweig der Quadratwurzel“ als Umkehrfunktion.

(b) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $x \mapsto x^3$ ist bijektiv, denn für jedes $y \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = x^3$. Somit existiert eine Umkehrfunktion. Dieser Umkehrfunktion geben wir den Namen „reelle dritte Wurzel“ und führen die Schreibweise $x = \sqrt[3]{y}$ ein.

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ gilt

$$\begin{aligned} f\Big([-1,1]\Big) &= \{x^3 + 1\,;\ x \in [-1,1]\} = [0,2], \\ f^{-1}\Big(\{-1\}\Big) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^3 + 1 = -1\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^3 = -2\} = \{\sqrt[3]{-2}\}, \\ f^{-1}\Big([0,1]\Big) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^3 + 1 \in [0,1]\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^3 \in [-1,0]\} = [-1,0]. \end{aligned}$$

Analog zu $x \mapsto x^3$ ist auch die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ bijektiv und damit invertierbar. Die Funktionsvorschrift der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können wir auf die dritte Wurzel zurückführen: Es gilt

$$y = x^3 + 1 \ \Leftrightarrow\ x^3 = y - 1 \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt[3]{y-1},$$

und somit ist $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.

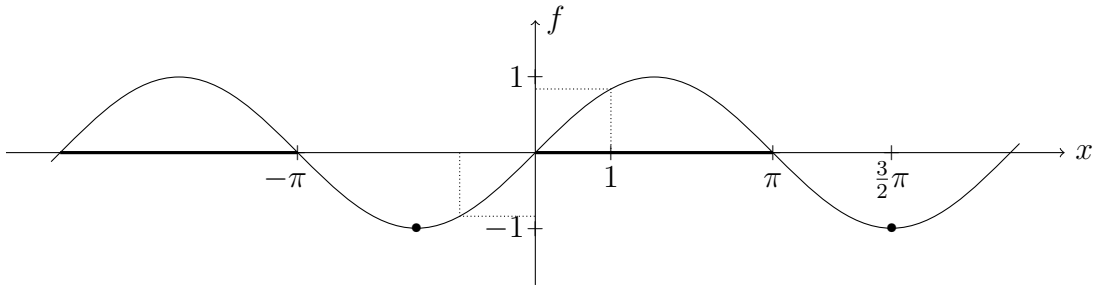
(c) Da die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[-1,1]$ monoton wächst, gilt

$$f\Big([-1,1]\Big) = [\sin(-1), \sin(1)].$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\{-1\}\Big) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ \sin(x) = -1\} = \{\tfrac{3}{2}\pi + 2\pi k\,;\ k \in \mathbb{Z}\}, \\ f^{-1}\Big([0,1]\Big) &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ \sin(x) \in [0,1]\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2\pi k, 2\pi k + \pi]. \end{aligned}$$

Die Funktion ist offenbar weder injektiv noch surjektiv und damit nicht umkehrbar.



2.3. Mengen

(a) Für $x \geq -3$ gilt $|x+3| \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x+3 \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x \geq 0$.

Für $x \leq -3$ gilt $|x+3| \geq 3 \;\Leftrightarrow\; -(x+3) \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x \leq -6$.

Folglich ist $\{x \in \mathbb{R}\,;\; |x+3| \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\; (x \geq 0) \vee (x \leq -6)\}$.

(b) Die Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$ gilt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Angewendet auf $a = x-2$ und $b = 2$ folgt

$$|x| = |(x-2)+2| \leq |x-2| + |2| = |x-2| + 2.$$

Folglich gilt $|x-2| \geq |x| - 2$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(c) Für $x = -2$ ist die linke Seite nicht definiert. Für $x > -2$ ist $x+2 > 0$ und somit

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4x-2}{x+2} \geq 2-x \;&\Leftrightarrow\; x^2-4x-2 \geq (2-x)(2+x)\\ &\Leftrightarrow\; 2x^2-4x-6 \geq 0\\ &\Leftrightarrow\; 2(x+1)(x-3) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x \leq -1) \vee (x \geq 3).\end{aligned}$$

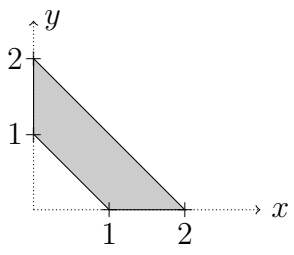
Wir merken uns, dass diese Bedingung lediglich für $x > -2$ gültig ist. Für $x < -2$ gilt $x+2 < 0$. Bei Multiplikation mit $(x+2)$ kehrt sich daher die Ungleichung um:

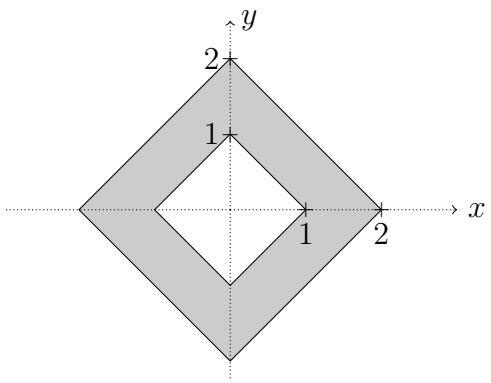
$$\begin{aligned}\frac{x^2-4x-2}{x+2} \geq 2-x \;&\Leftrightarrow\; x^2-4x-2 \leq (2-x)(2+x)\\ &\Leftrightarrow\; 2(x+1)(x-3) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 3.\end{aligned}$$

Diese Bedingung ist jedoch für kein $x < -2$ erfüllt. Insgesamt folgt also

$$\{x \in \mathbb{R}\,;\; \tfrac{x^2-4x-2}{x+2} \geq 2-x\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\; (-2 < x \leq -1) \vee (x \geq 3)\}.$$

(d) Im Bereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ wird die Bedingung $1 \leq |x| + |y| \leq 2$ zu $1 \leq x+y \leq 2$. Dies ist äquivalent zu $1-x \leq y \leq 2-x$. Daraus lässt sich die Form der Menge im ersten Quadranten ablesen (linkes Bild). Aus Symmetriegründen erhält man insgesamt das rechte Bild.





2.4. Supremum und Infimum

$$A = \left\{ \tfrac{|x|}{1+|x|} \,;\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Behauptung. Es gilt $\inf A = 0 = \min A$. Ferner gilt $\sup A = 1$ und $1 \notin A$, das heisst, A hat kein Maximum.

Beweis. Aus $\frac{|x|}{1+|x|} \geq 0$ folgt $\inf A \geq 0$. Für $x = 0$ ist $\frac{|x|}{1+|x|} = 0$, das heißt $0 \in A$ und es folgt $\inf A = \min A = 0$.

Wegen $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|} < 1$ ist 1 eine obere Schranke von A. Wir zeigen nun, dass es keine kleinere obere Schranke gibt. Sei $a < 1$. Dann gilt

$$\tfrac{|x|}{1+|x|} > a \;\Leftrightarrow\; |x| > a + a|x| \;\Leftrightarrow\; |x| > \frac{a}{1-a}$$

Die letzte Bedingung lässt sich leicht erfüllen, zum Beispiel durch $x = |\frac{2a}{1-a}| \in \mathbb{R}$. Folglich existiert für jedes $a < 1$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $A \ni \frac{|x|}{1+|x|} > a$, das heisst, a ist keine obere Schranke. Daher ist 1 die kleinste obere Schranke, also das Supremum von A. Wegen $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|} < 1$ ist $1 \notin A$, das heisst, A enthält kein Maximum. $\square$

$$B = \left\{ x + \tfrac{1}{x} \,;\; \tfrac{1}{2} < x \leq 2 \right\}.$$

Behauptung. Es gilt $\inf B = 2 = \min B$ und $\sup B = \frac{5}{2} = \max B$.

Beweis. Für alle $x > \frac{1}{2}$ gilt

$$(x + \tfrac{1}{x}) - 2 = \tfrac{1}{x}(x^2 + 1 - 2x) = \tfrac{1}{x}(x-1)^2 \geq 0$$

Es folgt $x + \frac{1}{x} \geq 2$, das heisst, 2 ist eine untere Schranke der Menge B. Für $x_1 = 1$ gilt $\frac{1}{2} < x_1 \leq 2$ und $x_1 + \frac{1}{x_1} = 2$, das heisst, $2 \in B$ und es folgt die Behauptung über Infimum und Minimum. Ferner gilt für alle $\frac{1}{2} < x \leq 2$

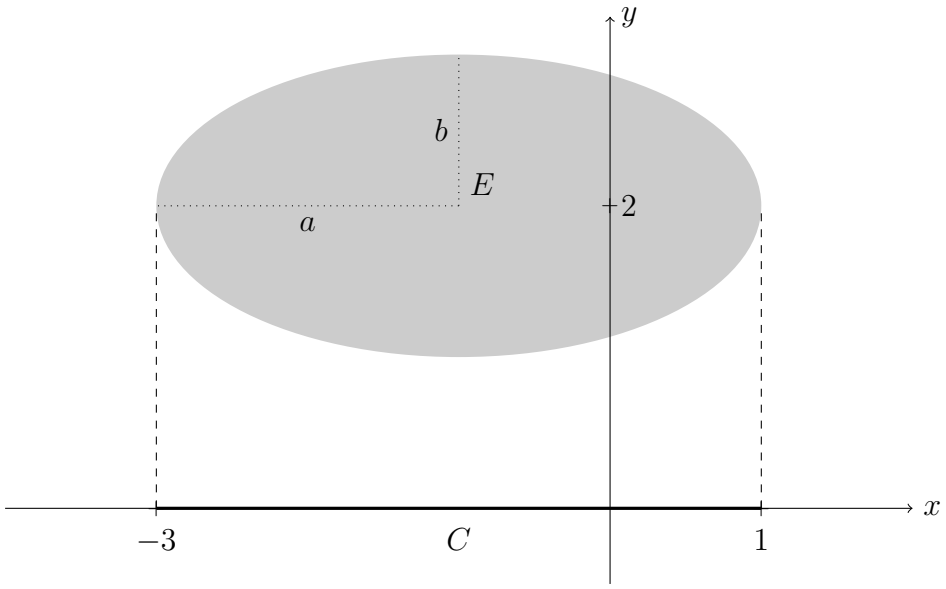
$$(x + \tfrac{1}{x}) - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{x}(x^2 + 1 - \tfrac{5}{2}x) = \tfrac{1}{x}(x - \tfrac{1}{2})(x-2) \leq 0.$$

Es folgt $x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}$, das heisst, $\frac{5}{2}$ ist eine obere Schranke der Menge B. Für $x_2 = 2$ gilt $\frac{1}{2} < x_2 \leq 2$ und $x_2 + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{2}$, das heisst, $\frac{5}{2} \in B$ und es folgt die Behauptung über Supremum und Maximum. $\square$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}\,;\ \exists y \in \mathbb{R} : (x+1)^2 + 4(y-2)^2 < 4 \right\}.$$

Behauptung. Es gilt $\sup C = 1$ und $\inf C = -3$. Die Menge C enthält weder Maximum noch Minimum.

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+1)^2 + 4(y-2)^2 < 4 \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 < 1,$$

das heisst, die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, welche die Bedingung erfüllen, ist das Innere einer Ellipse E mit Mittelpunkt $(-1, 2)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$. Somit gilt $\inf C = -3$ und $\sup C = 1$. Die Menge besitzt kein Maximum und kein Minimum, da Punkte auf dem Rand der Ellipse die geforderte Ungleichung nicht erfüllen. $\square$