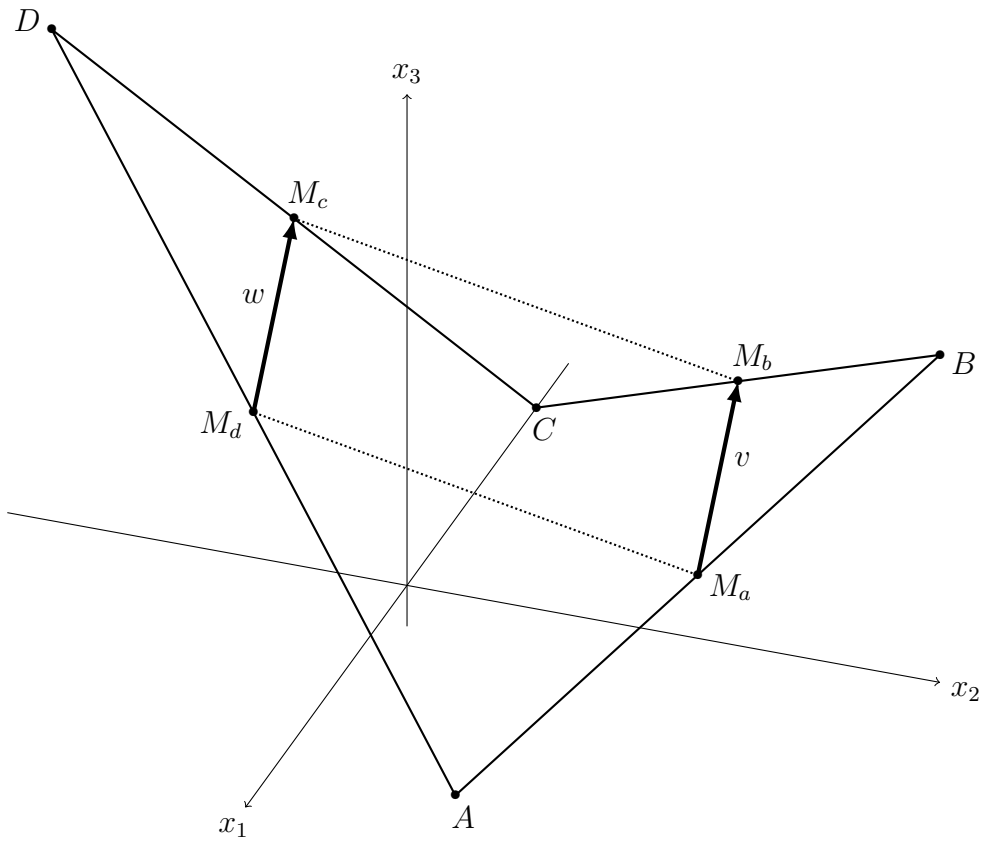
3.1. Viereck Wir benutzen die Bezeichnungen aus der Zeichnung.



Die Vektoren $v := M_b - M_a$ und $w := M_c - M_d$ sind gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned} v &= M_b - M_a = \tfrac{1}{2}(B + C) - \tfrac{1}{2}(A + B) = \tfrac{1}{2}(C - A), \\ w &= M_c - M_d = \tfrac{1}{2}(C + D) - \tfrac{1}{2}(D + A) = \tfrac{1}{2}(C - A). \end{aligned}$$

Aus $v = w$ folgt unmittelbar

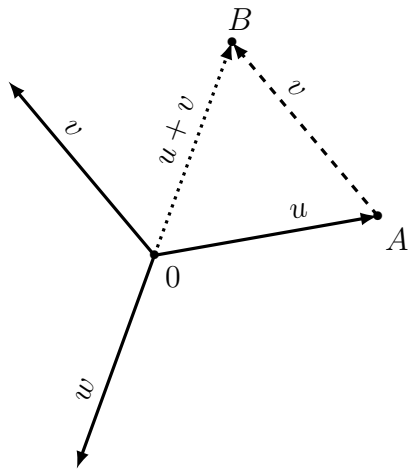
$$M_a - M_d = w + (M_b - M_c) - v = M_b - M_c,$$

das heisst, dass Viereck $M_aM_bM_cM_d$ ist ein Parallelogramm und liegt somit in einer Ebene. Insbesondere liegen auch seine Eckpunkte, die Seitenmitten M_a, M_b, M_c, M_d in einer Ebene.

3.2. Einheitsvektoren Wir unterscheiden die Fälle $n = 1$ und $n \geq 2$.

Die einzigen Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^1$ sind $(+1)$ und (-1). Daher kann die Summe dreier Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^1$ nicht Null sein. Sei daher $n \geq 2$ und seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ Einheitsvektoren mit $u + v + w = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Geometrische Lösung. Wir betrachten das Dreieck $0AB$, wobei 0 der Ursprung ist und $A = u \in \mathbb{R}^n$ sowie $B = u + v \in \mathbb{R}^n$ gelte. Dann ist $B - A = v$. Ausserdem folgt $u + v = -w$ aus der Annahme $u + v + w = 0$. Die Seiten des Dreiecks $0AB$ entsprechen also den Vektoren $u, -w, v$. Damit ist $0AB$ gleichseitig mit Seitenlänge 1. Es folgt, dass die Vektorpaare $-w, u$ und $u, -v$ sowie $v, -w$ jeweis im Winkel $\frac{1}{3}\pi$ zueinander stehen (60 Grad). Damit stehen je zwei der Vektoren u, v, w im Winkel $\frac{2}{3}\pi$ zueinander.



Algebraische Lösung (verwendet das Skalarprodukt). Es sei $u \cdot v$ das euklidische Skalarprodukt der Vektoren u und v im $\mathbb{R}^n$. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ Einheitsvektoren. Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung $u+v+w = 0$ jeweils das Skalarprodukt mit u, v und w, so erhält man wegen $u \cdot u = v \cdot v = w \cdot w = 1$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} x &:= v \cdot w, \\ y &:= u \cdot w, \\ z &:= u \cdot v. \end{aligned}$$

Die Matrix auf der linken Seite hat Determinante 2, das heisst, sie ist invertierbar und das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, nämlich $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Es sei $\alpha_{u,v}$ der von den Vektoren u und v eingeschlossene Winkel. Da u, v, w Einheitsvektoren sind, folgt

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2} &= v \cdot w = \cos(\alpha_{v,w}) & \Rightarrow \quad \alpha_{v,w} &= \tfrac{2}{3}\pi, \\ -\tfrac{1}{2} &= u \cdot w = \cos(\alpha_{u,w}) & \Rightarrow \quad \alpha_{u,w} &= \tfrac{2}{3}\pi, \\ -\tfrac{1}{2} &= u \cdot v = \cos(\alpha_{u,v}) & \Rightarrow \quad \alpha_{u,v} &= \tfrac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

3.3. komplexe Teilmengen Sei $z \in \mathbb{C}$ und seien $x, y \in \mathbb{R}$ sodass $z = x + iy$.

$$A = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \overline{z} = -z\}.$$

Es gilt $z \in A \ \Leftrightarrow\ x - iy = -(x + iy) \ \Leftrightarrow\ x = -x \ \Leftrightarrow\ x = 0$. Folglich ist A die imaginäre Achse.

$$B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,;\ \overline{z} = \tfrac{1}{z}\}.$$

Es gilt $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Also ist $z \in B \ \Leftrightarrow\ |z|^2 = 1$. Folglich ist B der Einheitskreis um den Ursprung der komplexen Ebene.

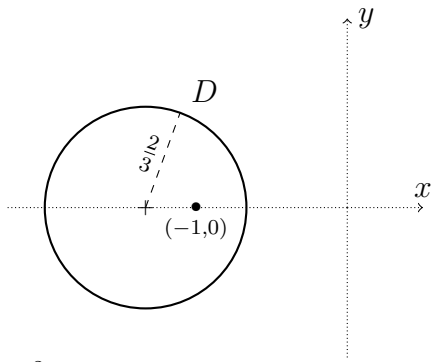
$$C = \{z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1\}.$$

Es gilt $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(ix - y) = -y = -\operatorname{Im}(z)$. Folglich ist $z \in \mathbb{C} \ \Leftrightarrow\ 0 < -\operatorname{Im}(z) < 1$. Also ist C der Streifen aller Punkte strikt zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = -1$.

$$D = \Big\{z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}\,;\ |\tfrac{z}{z+1}| = 2\Big\}.$$

Der Bruch $|\frac{z}{z+1}|$ ist definiert für $z \neq -1 + i0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& |\tfrac{z}{z+1}| = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{|z|}{|z+1|} = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & |z| = 2|z+1| \\
\Leftrightarrow\quad & |z|^2 = 4|z+1|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & |x+iy|^2 = 4|x+1+iy|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + y^2 = 4\Big((x+1)^2 + y^2\Big) \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = 3x^2 + 8x + 4 + 3y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = x^2 + \tfrac{8}{3}x + (\tfrac{4}{3})^2 - (\tfrac{4}{3})^2 + \tfrac{4}{3} + y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{4}{9} = (x + \tfrac{4}{3})^2 + y^2.
\end{aligned}$$



Folglich ist D der Kreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $(-\frac{4}{3}, 0)$ und Radius $\frac{2}{3}$. Der bereits ausgeschlossene Punkt $(-1, 0)$ liegt ohnehin nicht auf dem Kreis.

$$E = \Big\{z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}\,;\ \operatorname{Im}(\tfrac{z-i}{z+i}) = 0\Big\}.$$

Der Ausdruck $\operatorname{Im}(\frac{z-i}{z+i})$ ist nur fur $z \neq 0 - i$ definiert. Es gilt

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x + i(y-1)}{x + i(y+1)} = \frac{\Big(x + i(y-1)\Big)\Big(x - i(y+1)\Big)}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{x^2 - 2ix + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}.$$

Damit ist E die imaginäre Achse ohne den Punkt $z = 0 - i$, denn es folgt

$$\operatorname{Im}\Big(\frac{z-i}{z+i}\Big) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0.$$

3.4. komplexe Zahlen

(a) Aus den Annahmen $|z| = 1$ und $w \neq z$ folgt $\overline{z}w \neq \overline{z}z = |z|^2 = 1$. Also ist $1 - \overline{z}w \neq 0$ und der Ausruck $|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}|$ ist definiert. Ferner ist $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = 1$. Also folgt

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z-w}{z-z\overline{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{z-|z|^2 w}\right| = \left|\frac{z-w}{z-w}\right| = 1.$$

(b) Bei z und u erweitern zuerst mit dem komplex konjugierten Nenner bevor wir die Brüche addieren.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} + \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} \\ &= \frac{1-i}{2} + \frac{2-i}{5} + \frac{3-i}{10} = \frac{6}{5} - \frac{4}{5}i, \\ u &= \frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + \frac{(1-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-8i}{5} + \frac{-2-4i}{10} = 0 - 2i. \end{aligned}$$

Gesucht ist $v \in \mathbb{C}$ mit $v^2 = i$. In Polarform ist $v = re^{i\varphi}$ und $v^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. Ferner ist $e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Folglich erhalten wir die Gleichungen

$$r^2 = 1 \quad \text{und} \quad 2\varphi = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist $r = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Wir erhalten verschiedene Lösungen für $k = 0$ und für $k = 1$, nämlich

$$v_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{und} \quad v_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Gesucht ist $w \in \mathbb{C}$ mit $w = i^i$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$i^i = \left(e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}\right)^i = e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} + 0i.$$

Wir erhalten also für $w = i^i$ unendlich viele verschiedene Lösungen, die alle reell sind.

(c) Wir bringen die Faktoren zunächst in Polarform. Aus $1 + i = re^{i\varphi}$ erhalten wir die Gleichungen $r^2 = 1 + 1$ und $\tan(\varphi) = \frac{1}{1}$. Da Real- und Imaginärteil von $1 + i$ beide positiv sind, gilt $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Aus $1 + \sqrt{3}i = se^{i\phi}$ erhalten wir die Gleichungen $s^2 = 1 + 3$ und $\tan(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{1}$. Da der Realteil positiv und der Imaginärteil negativ ist, gilt $1 + \sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Also ist

$$(1+i)^4(1-\sqrt{3}i)^3 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 4e^{i\pi}\, 8e^{-i\pi} = 32.$$

3.5. komplexe Wurzeln

(a) Wir schreiben $z \in \mathbb{C}$ in Polarform als $z = re^{i\varphi}$. Dann ist

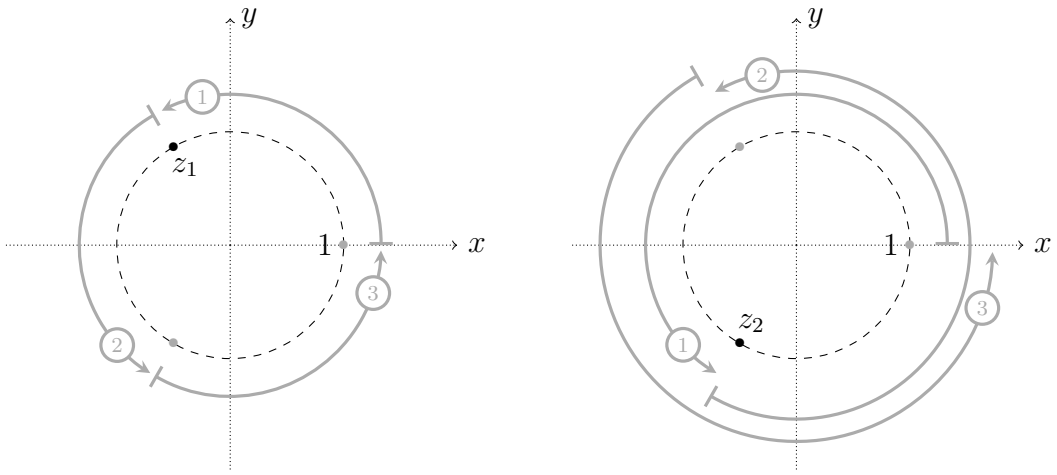
$$z^n = 1 \;\Leftrightarrow\; r^n e^{i\varphi n} = 1 \;\Leftrightarrow\; (r^n = 1) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} : \varphi n = 2\pi k)$$

Also ist $z = re^{i\phi}$ genau dann eine n-te Einheitswurzel, falls $r = 1$ und $\varphi = 2\pi\frac{k}{n}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Da $e^{i2\pi\frac{k}{n}} = e^{i2\pi\frac{k+n}{n}}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, werden alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ bereits durch $k = 0, 1, \ldots, n-1$ abgedeckt. Die n-ten Einheitswurzeln sind somit

$$\left\{z_k = e^{i2\pi\frac{k}{n}}\,;\; k \in \{0, 1, \ldots, n\}\right\}.$$

Geometrische Interpretation. Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ entsprechen den Eckpunkten eines regelmässigen n-Ecks um den Ursprung der komplexen Ebene mit einer einer Ecke bei $(1, 0)$.

Begründung. Man erhält das Produkt zweier komplexer Zahlen in Polarform, indem man die Radien multipliziert und die Winkel addiert. Aus $z \cdot z \cdots z = 1$ folgt zunächst, dass z in Polarform Radius 1 hat. Um nach n-facher Multiplikation tatsächlich beim Punkt $(1, 0)$ zu landen, muss ausserdem das n-fache des polaren Winkels von z ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ergeben. Wir veranschaulichen dies anhand der 3-ten Einheitswurzeln $\{1, z_1, z_2\}$. Die Pfeile zeigen die erste, zweite und dritte Potenz von z_1 beziehungsweise z_2.



(b) Es gilt $1z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = (z^3 + 3z^2 + 3z + 1) - 8 = (z + 1)^3 - 8$. Folglich ist

$$\begin{aligned} 1z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0 \;&\Leftrightarrow\; (z+1)^3 = 8 && (8 = 2^3) \\ &\Leftrightarrow\; (z+1) \in \{2, 2e^{i\pi\frac{2}{3}}, 2e^{i\pi\frac{4}{3}}\} \\ &\Leftrightarrow\; z \in \{1, 2e^{i\pi\frac{2}{3}} - 1, 2e^{i\pi\frac{4}{3}} - 1\}. \end{aligned}$$

Umgerechnet erhält man die drei Lösungen $z_0 = 1$ sowie $z_1 = -2 + i\sqrt{3}$ und $-2 - i\sqrt{3}$.