4.1. Folgen

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn es gilt $|a_n| = |\cos(\frac{\pi}{3}n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt $a_{6k} = \cos(2\pi k) = 1$ und $a_{6k+3} = \cos(2\pi k + \pi) = -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton und nicht konvergent.

Es gilt $b_n = \sin(n\pi + \frac{1}{n}) = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ und $|b_n| = |\sin(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, nicht monoton aber konvergent mit Grenzwert 0.

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen 0, denn

$$c_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}.$$

Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton wachsend und konvergiert gegen 1, denn

$$\begin{aligned} d_n = \sqrt{n(n+2)} - n &= \frac{\left(\sqrt{n(n+2)} - n\right)\left(\sqrt{n(n+2)} + n\right)}{\sqrt{n(n+2)} + n} \\ &= \frac{n(n+2) - n^2}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \frac{2n}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, denn

$$e_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Das Rekursionsgesetz $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = \frac{1}{2}(f_{n-1} + f_{n-2})$ für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ impliziert

$$F_n := f_n - f_{n-1} = \tfrac{1}{2}(f_{n-1} + f_{n-2}) - f_{n-1} = \tfrac{1}{2}(-f_{n-1} + f_{n-2}) = -\tfrac{1}{2}F_{n-1}.$$

Es folgt

$$F_n = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}F_1 = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}(f_1 - f_0) = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}.$$

Das Folgenglied f_n lässt sich schreiben als Teleskopsumme

$$f_n = f_0 + \sum_{k=1}^{n}(f_k - f_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} (-\tfrac{1}{2})^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-\tfrac{1}{2})^{k} = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 - (-\frac{1}{2})},$$

wobei zuletzt die Formel der geometrischen Reihe verwendet wird. Damit ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und konvergiert gegen $\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$, ist aber nicht monoton.

4.2. Fibonacci Es sei $\Phi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $\Psi := \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

(a) Zu beweisen ist $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1})$. Man beachte, dass a_{n+2} sowohl von a_{n+1} als auch a_n abhängt. Die vollständige Induktion muss daher bei $n = 0$ und $n = 1$ verankert werden und der Induktionsschritt schliesst von n und $n+1$ auf $n+2$.

Verankerung. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \Psi^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{2\sqrt{5}}{2}\Big) = 1 = a_0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^2 - \Psi^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{4\sqrt{5}}{4}\Big) = 1 = a_1.$$

Induktionsannahme. Für gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\Big), \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2}\Big).$$

Induktionsschritt. Wir folgern die Behauptung für $n+2$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\Big) + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2}\Big) && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+1}(1+\Phi) - \Psi^{n+1}(1+\Psi)\Big). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, falls $(1+\Phi) = \Phi^2$ und $(1+\Psi) = \Psi^2$ gilt. In der Tat ist

$$\Phi^2 = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi + 1,$$
$$\Psi^2 = \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \Psi + 1.$$

Somit ist wie behauptet $a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+3} - \Psi^{n+3})$.

(b) Aus der expliziten Formel bewiesen in (a) folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| &= \Big|\frac{a_{m+1}}{a_m} - \Phi\Big| = \Big|\frac{\Phi^{m+2} - \Psi^{m+2}}{\Phi^{m+1} - \Psi^{m+1}} - \Phi\Big| \\ &= \Big|\frac{\Phi\Psi^{m+1} - \Psi^{m+2}}{\Phi^{m+1} - \Psi^{m+1}}\Big| = \Big|\frac{\Phi - \Psi}{(\frac{\Phi}{\Psi})^{m+1} - 1}\Big| \le \frac{\sqrt{5}}{|\frac{\Phi}{\Psi}|^{m+1} - 1}, \end{aligned}$$

wobei $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ und $\Big|(\frac{\Phi}{\Psi})^{m+1} - 1\Big| \ge |\frac{\Phi}{\Psi}|^{m+1} - 1$ verwendet wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann folgt aus der vorherigen Abschätzung

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| < \varepsilon \;&\Leftarrow\; \sqrt{5} < \varepsilon\Big(|\tfrac{\Phi}{\Psi}|^{m+1} - 1\Big) \\ &\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1 < |\tfrac{\Phi}{\Psi}|^{m+1} \\ &\Leftrightarrow\; \log\Big(\tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big) < (m+1)\log|\tfrac{\Phi}{\Psi}| \\ &\Leftrightarrow\; m > \frac{\log\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} - 1 =: N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es sei $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ die Zahl $N(\varepsilon)$ aufgerundet. Somit existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass $|b_m - \Phi| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq n(\varepsilon)$ folgt. Das heisst nach Definition, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Φ konvergiert.

(c) Gesucht ist die Zahl $n(\varepsilon)$ aus Teilaufgabe (b) für $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Also berechnen wir

$$N(\tfrac{1}{100}) = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} - 1 = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log\Big|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\Big|} - 1 \approx 4.6257.$$

Es folgt $n(\frac{1}{100}) = 5$, das heisst für alle natürlichen Zahlen $m \geq 5$ gilt $|b_m - \Phi| < \frac{1}{100}$.

4.3. arithmetische Mittel Nach Definition ist folgende Aussage zu zeigen.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a - s_n| < \varepsilon$$

Sei daher $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung konvergiert $a_n \to a$, das heisst es existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq m_0$ gilt. Dies motiviert die folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned} |a - s_n| &= \Big|a - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| = \frac{1}{n}\Big|na - \sum_{k=1}^{n} a_k\Big| = \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}(a - a_k)\Big| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a - a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_0-1}|a - a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=m_0}^{n}\underbrace{|a - a_k|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

Die Summanden im zweiten Term sind alle kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Im ersten Term gilt diese Abschätzung nicht, aber es sind unabhängig von n nur eine feste Anzahl von Summanden. Daher können wir den ersten Term wie folgt abschätzen.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_0-1}|a - a_k| \leq \frac{m_0 - 1}{n}\max\{|a_k - a|\,;\; 1 \leq k \leq m_0 - 1\}.$$

Wählen wir $n_0(\varepsilon) := \frac{2}{\varepsilon}(m_0 - 1)\max\{|a_k - a|\,;\ 1 \le k \le m_0 - 1\}$, so gilt

$$\forall n \ge n_0(\varepsilon): \quad |a - s_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\Big(n \cdot \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon$$

und die Behauptung folgt. Es existieren auch divergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren arithmetische Mittel konvergieren, etwa $a_n = (-1)^n$. In diesem Beispiel ist $s_n = 0$ für gerade n und $s_n = -\frac{1}{n}$ für ungerade n, also $s_n \to 0$.

4.4. Gold rekursiv Wir beweisen Beschränktheit und Monotonie der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ via vollständiger Induktion. Da a_n nichtnegativ ist, folgt die Schranke $|a_n| \le 2$ aus

Behauptung 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \le 2$.

Verankerung. In der Tat gilt $a_1 = 1 \le 2$.

Induktionsannahme. Für gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung $a_n \le 2$.

Induktionsschritt. Nach Induktionsannahme und Monotonie der Wurzelfunktion gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \le \sqrt{1 + 2} < 2.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Monotonie beweisen wir im Rahmen von

Behauptung 2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \ge a_n$.

Verankerung. Für $n = 1$ gilt in der Tat $a_2 = \sqrt{1 + 1} \ge 1 = a_1$.

Induktionsannahme. Für gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung $a_{n+1} \ge a_n$.

Induktionsschritt. Nach Induktionsannahme folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \le \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Damit ist die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton, also also existiert ein Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$, den es noch zu bestimmen gilt. Aus Konvergenz $a_n \to a$ folgt insbesondere

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \le |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Andererseits konvergiert

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{1 + a_n} - a_n \to \sqrt{1 + a} - a \quad \text{für } n \to \infty.$$

Dank Eindeutigkeit des Grenzwerts gilt $0 = \sqrt{1 + a} - a$, das heisst, a erfüllt die Gleichung $a = \sqrt{1 + a}$. Die Gleichung $x^2 = x + 1$ hat Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Wegen $a_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ ist auch $a \ge 0$. Folglich verbleibt als einziger Kandidat

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

4.5. Binomialkoeffizienten

(a) Es seien $0 \leq k \leq n$ nichtnegative ganze Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebige reele Zahlen. Wir beweisen den Binomischen Lehrsatz per Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Verankerung. Die Behauptung ist richtig für $n = 0$, denn $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$.

Induktionsnahme. Der Binomische Lehrsatz gelte für gewisses $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Induktionsschritt. Es folgt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\ &= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\end{aligned}$$

Um gleiche Potenzen von a und b ausklammern zu können, schreiben wir die zweite Summe um, indem wir statt über $k \in \{0, \ldots, n\}$ über $\ell = k+1 \in \{1, \ldots, n+1\}$ summieren.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{n-(\ell-1)}\, b^{\ell}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} a^{n+1-\ell}\, b^{\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} a^{n+1-\ell}\, b^{\ell} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \left(\binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1} \right) a^{n+1-\ell}\, b^{\ell} + b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+1}{\ell} a^{n+1-\ell}\, b^{\ell} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} a^{n+1-\ell}\, b^{\ell},\end{aligned}$$

wobei $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$ benutzt wurde. Damit folgt die Behauptung.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\, 1^k = (1+1)^n = 2^n.$