5.1. Diverse Grenzwerte

(a) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $a_n \to x$ und $b_n \to x$ folgt insbesondere

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad (x - \varepsilon < a_n) \wedge (b_n < x + \varepsilon).$$

Zusammen mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt $\forall n \geq n_0 : (x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon)$, also $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und damit Konvergenz $x_n \to x$ nach Definition.

(b) Wir beweisen $a = 0$ mithilfe von (a). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n}.$$

Sowohl $a_n = 0$ alsauch $b_n = \frac{1}{n}$ konvergieren gegen 0 für $n \to \infty$. Somit folgt $\frac{n!}{n^n} \to 0$.

Nach dem selben Prinzip kann $b = 1$ gezeigt werden. In der Vorlesung wurde Konvergenz $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ bewiesen. Analog dazu beweist man Konvergenz $\sqrt[n]{w} \to 1$ für eine beliebige, *feste* reelle Zahl $w > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten die Ungleichungen

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{4n+2} \leq \sqrt[n]{4n+2n} = \sqrt[n]{6} \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Wie oben erwähnt, konvergieren $a_n = \sqrt[n]{n}$ und $b_n = \sqrt[n]{6} \cdot \sqrt[n]{n}$ beide gegen 1 für $n \to \infty$. Folglich muss auch $\sqrt[n]{4n+2}$ gegen 1 konvergieren.

Zähler und Nenner der Folge mit Grenzwert c konvergieren beide gegen Null, was keine Schlussfolgerung zulässt. Formen wir den Bruch jedoch um, so sehen wir $c = 6$.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{n}{n^2-42} - \frac{1}{n}}{\frac{7}{n^3+3n+1}} &= \frac{n^3+3n+1}{7} \cdot \frac{n^2-(n^2-42)}{(n^2-42)n} \\
&= \frac{(n^3+3n+1) \cdot 42}{7(n^2-42)n} \cdot \frac{n^{-3}}{n^{-3}} = \frac{(1+3n^{-2}+n^{-3}) \cdot 6}{1-42n^{-2}} \xrightarrow{n\to\infty} 6.
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen jeweils zuerst den Grenzwert innerhalb der Klammer.

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+2^{n-k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\lim\limits_{k\to\infty} 2^{n-k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+0}\right) = 1, \\
B &= \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^{n-k}}\right) = \lim_{k\to\infty}\Big(0\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Es gilt $A \neq B$, das heisst, Grenzwerte bezüglich verschiedener Parameter darf man im Allgemeinen nicht vertauschen.

5.2. Cauchy-Kriterium $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Definition eine Cauchy-Folge, falls gilt

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Es genügt *nicht*, dass $|q_n - q_{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

$$q_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| \to 0$ für $n \to \infty$, aber $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge vermöge

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

5.3. Häufungspunkte Nach Definition ist $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt der komplexen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls sie eine gegen z konvergente Teilfolge zulässt.

(a) Falls $\frac{\alpha}{2\pi} \in [0, 1[\cap \mathbb{Q}$, so gibt es teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{p}{q}$.

Behauptung. Die Menge A der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = e^{i\alpha n}$ ist

$$A = \{e^{i\alpha}, e^{i2\alpha}, \ldots, e^{iq\alpha}\}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\alpha q = 2\pi p$. Daraus folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$a_{k+q} = (e^{i\alpha})^{k+q} = (e^{i\alpha})^k \cdot e^{i\alpha q} = a_k \cdot e^{i2\pi p} = a_k,$$

das heisst, die Folge ist periodisch mit Periode q. Ferner gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < m - n < q$, dass $\frac{\alpha(m-n)}{2\pi} = (m-n)\frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$, da p und q teilerfremd sind. Folglich ist

$$a_n - a_m = e^{i\alpha n} - e^{i\alpha m} = e^{i\alpha n}(1 - e^{i\alpha(m-n)}) \neq 0,$$

das heisst, alle Folgenglieder einer Periode sind verschieden. Für $k \in \{1, \ldots, q\}$ sei $\Lambda_k = \{k + qm\,;\ m \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist $\Lambda_k \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge und wir erhalten die Teilfolgen $(a_\ell)_{\ell\in\Lambda_0}, \ldots, (a_\ell)_{\ell\in\Lambda_{q-1}}$ die jeweils konstant, also trivialerweise konvergent sind. Die jeweiligen Grenzwerte sind $a_1, \ldots, a_q$ welche nach obiger Überlegung paarweise verschieden sind. Daher gilt

$$A \supset \{a_1, a_2, \ldots, a_q\} = \{e^{i\alpha}, e^{i2\alpha}, \ldots, e^{iq\alpha}\}.$$

Jede andere Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist kein Häufungspunkt, denn gemäss Periodizität gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - z| \geq \min\{|a_1 - z|, \ldots, |a_q - z|\} =: \delta_0$$

Aus $z \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ folgt $\delta_0 > 0$ und es kann keine gegen z konvergente Teilfolge geben. Also gilt $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\} = \{e^{i\alpha}, e^{i2\alpha}, \ldots, e^{iq\alpha}\}$. $\square$

(b) Sei $\frac{\alpha}{2\pi} \in [0,1[\setminus \mathbb{Q}$, das heisst, $k\alpha$ ist für kein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Folglich gilt für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$a_n - a_m = e^{i\alpha n} - e^{i\alpha m} = e^{i\alpha n}(1 - e^{i\alpha(m-n)}) \neq 0.$$

Alle Folgenglieder sind somit paarweise verschieden, das heisst, die Folge ist injektiv.

Behauptung. Die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der ganze Einheitskreis (Diese Behauptung folgt natürlich nicht allein aus der Injektivität: Zum Beispiel sind alle $g_n = e^{i\frac{1}{n}}$ verschieden und auf dem Kreis, haben aber nur 1 als Häufungspunkt.)

Beweis. Es gilt $|a_n| = |e^{i\alpha n}| = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \neq 1$, so ist

$$|w - a_n| \geq \Big||w| - |a_n|\Big| = \Big||w| - 1\Big| =: c > 0$$

Für $0 < \varepsilon < c$ existiert somit kein $n \in \mathbb{N}$ mit $|w - a_n| < \varepsilon$ weshalb w mit $|w| \neq 1$ kein Häufungspunkt sein kann. Um zu zeigen, dass überhaupt Häufungspunkte existieren, verallgemeinern wir den Satz von Bolzano-Weierstrass auf komplexe Folgen.

Sei x_n der Realteil und y_n der Imaginärteil von a_n. Wegen $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Gemäss des Satzes von Bolzano-Weierstrass hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_n)_{n\in\Lambda}$ gegeben durch $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Analog ist $(y_n)_{n\in\Lambda}$ beschränkt und hat eine konvergente (Teil-)teilfolge $(y_n)_{n\in\Gamma}$ gegeben durch $\Gamma \subset \Lambda$. Gemäss der Bemerkung in der Aufgabe ist dann $(a_n)_{n\in\Gamma}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das heisst, es existiert mindestens ein Häufungspunkt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir konstruieren zunächst eine spezielle Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die mit fester Schrittweite $s < \varepsilon$ den Einheitskreis abwandert. Gemäß Konvergenz der Teilfolge $(a_n)_{n\in\Gamma}$ existieren $m_\varepsilon, n_\varepsilon \in \Gamma$, $m_\varepsilon > n_\varepsilon$, sodass $|a_{m_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$ nach dem Cauchy-Kriterium. Wir definieren $b_k = b_k(\varepsilon) := a_{k(m_\varepsilon - n_\varepsilon)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}|b_{k+1} - b_k| &= |e^{i\alpha(k+1)(m_\varepsilon - n_\varepsilon)} - e^{i\alpha k(m_\varepsilon - n_\varepsilon)}| \\ &= |e^{i\alpha k(m_\varepsilon - n_\varepsilon)}||e^{-i\alpha n_\varepsilon}||e^{i\alpha m_\varepsilon} - e^{i\alpha n_\varepsilon}| = 1 \cdot 1 \cdot |a_{m_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon}| =: s < \varepsilon.\end{aligned}$$

Die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist bis auf „Umnummerierung“ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit ebenfalls injektiv. Injektivität und feste Schrittweite $s < \varepsilon$ implizieren, dass $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Kreis läuft ohne den Umlaufsinn zu ändern und daher jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ bis auf Abstand $< \varepsilon$ nahe kommt. Das genügt aber noch nicht, da die Teilfolge noch von ε abhängt. Da $\varepsilon > 0$ jedoch beliebig ist, können wir folgenden Trick anwenden:

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ beliebig. Für jedes $\varepsilon > 0$ definieren wir die Teilmenge $Q_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N};\ |z - b_k(\varepsilon)| < \varepsilon\}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei $p_j \in \mathbb{N}$ das j-te Element der Menge $Q_{\frac{1}{j}}$. Ferner sei $\Theta = \{p_j(m_{\frac{1}{j}} - n_{\frac{1}{j}});\ j \in \mathbb{N}\}$. Dann konvergiert die Teilfolge $(a_\ell)_{\ell\in\Theta}$ gegen z, denn für jedes $\ell = p_j(m_{\frac{1}{j}} - n_{\frac{1}{j}}) \in \Theta$ gilt $|a_\ell - z| = |b_{p_j} - z| < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{\ell}$. $\square$

5.4. Reihen

(a) Die Reihe über $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$ ist divergent, denn vermöge $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq 1$ konvergiert a_n *nicht* gegen Null.

(b) Die Reihe über $b_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$ konvergiert gemäss des Wurzelkriteriums, denn

$$\forall n \geq 10 : \quad \sqrt[n]{|b_n|} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{1-\frac{5}{n}} \leq \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} < 1.$$

(c) Wegen $d_n = \frac{1}{k^2-k} < \frac{1}{(k-1)^2}$ konvergiert die Reihe gemäss Majorantenkriterium. Um den Wert der Reihe zu bestimmen, betrachten wir die Folge der Partialsummen.

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &\overset{(\dagger)}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert $s_n \to 1$ für $n \to \infty$, das heisst, der Wert der Reihe ist 1.

Bemerkung zu (†). Da die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert, ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} \neq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$, denn $\infty - \infty$ ist *nicht definiert*. Man muss die die Folge der Partialsummen betrachten.

5.5. Konvergenzbereiche

(a) Die Reihe über $a_n = n!\, x^n$ konvergiert nach Quotientenkriterium nur für $x = 0$, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\, x}{n!}\right| = (n+1)|x| \begin{cases} < 1 & \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } x = 0, \\ > 1 & \forall n \geq \frac{1}{|x|}, \quad \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

(b) Die Reihe über $b_n = 2^n e^{2nx} = (2e^{2x})^n$ konvergiert nach Wurzelkriterium, falls $|2e^{2x}| = 2e^{2x} < 1$, was äquivalent zu $x < -\frac{1}{2}\ln(2)$ ist.

(c) Die Reihe über $c_n = \frac{2^{-n}x^n}{(1-x)^{2n}} = \left(\frac{\frac{1}{2}x}{(1-x)^2}\right)^n$ konvergiert nach Wurzelkriterium, falls

$$\left|\frac{\frac{1}{2}x}{(1-x)^2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}|x| < (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2.$$

Im Fall $x \geq 0$ ist die Bedingung äquivalent zu $0 < 1 - \frac{5}{2}x + x^2 = (x-2)(x-\frac{1}{2})$. Die Parabel ist nach oben geöffnet und damit positiv links oder rechts von beiden Nullstellen. Die Bedingung ist somit äquivalent zu $(0 \leq x < \frac{1}{2}) \vee (2 < x)$.

Im Fall $x \leq 0$ lautet die Bedingung $0 < 1 - \frac{3}{2}x + x^2$. Da diese Parabel nach oben geöffnet ist und wegen $(\frac{3}{2})^2 - 4 < 0$ keine Nullstellen hat, ist die Bedinung für alle $x \leq 0$ erfüllt. Der Konvergenzbereich ist somit $\{x \in \mathbb{R}\,;\ (x < \frac{1}{2}) \vee (2 < x)\}$.