6.1. Limes superior Es sei $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\beta = \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

(a) Zu beweisen ist $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \alpha + \beta$. Wir treffen die Gegenannahme

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{k\to\infty}\Big(\sup_{m\geq k}(a_m + b_m)\Big) > \alpha + \beta.$$

Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ sodass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{m\geq k}(a_m + b_m) \geq \alpha + \beta + \varepsilon_0.$$

Daraus folgt wiederum, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $m \geq k$ existiert, sodass

$$a_m + b_m \geq \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0$$

oder umgeformt $(a_m - \alpha) + (b_m - \beta) > \frac{1}{2}\varepsilon_0$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert also $m \geq k$ mit

$$(a_m - \alpha) \geq \tfrac{1}{4}\varepsilon_0 \quad \vee \quad (b_m - \alpha) \geq \tfrac{1}{4}\varepsilon_0 \tag{†}$$

Aus der Definition des Limes superiors (vgl. Bemerkung 3.4.2) folgt jedoch Existenz von k_0, sodass für alle $n \geq k_0$ gilt

$$a_n < \alpha + \tfrac{1}{4}\varepsilon_0 \quad \wedge \quad \beta_n < \beta + \tfrac{1}{4}\varepsilon_0 \tag{‡}$$

Die Aussagen (†) und (‡) widersprechen sich, das heisst, die Gegenannahme ist falsch und es gilt wie behauptet

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n. \tag{1}$$

Die übrigen Ungleichungen können wir aus dieser herleiten. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(-b_n) &= \lim_{k\to\infty}\Big(\sup_{m\geq k}(-b_m)\Big)\\ &= \lim_{k\to\infty}\Big(-\inf_{m\geq k}(b_m)\Big) = -\lim_{k\to\infty}\Big(\inf_{m\geq k}(b_m)\Big) = -\liminf_{n\to\infty}(b_n).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} a_n &= \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n - b_n)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) + \limsup_{n\to\infty}(-b_n) && \text{(wegen (1))}\\ &= \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) - \liminf_{n\to\infty}(b_n),\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n). \tag{2}$$

$$\begin{aligned}-\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \limsup_{n\to\infty}(-a_n - b_n)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(-a_n) + \limsup_{n\to\infty}(-b_n) && \text{(wegen (1))}\\ &= -\liminf_{n\to\infty}(a_n) - \liminf_{n\to\infty}(b_n),\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty}(a_n) + \liminf_{n\to\infty}(b_n). \tag{3}$$

(b) Es sei

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}+1}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$a_n + b_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= 1 < 1 + 1 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n, \\ \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= 1 > 1 - 1 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n, \\ \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= 0 > -1 - 1 = \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n. \end{aligned}$$

(c) Es seien $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_n})$. Nach Annahme ist

$$0 < \alpha' := \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \alpha < \infty.$$

Daraus folgt Existent von $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Folglich ist auch $\frac{1}{a_n} > 0$ für alle $n \geq n_0$, woraus $\beta \geq 0$ folgt. Angenommen, $\beta = 0$. Dann konvergiert eine Teilfolge von $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. Das bedeutet aber, dass a_n auf dieser Teilfolge divergiert, was $\alpha < \infty$ widerspricht. Folglich ist $\beta > 0$.

Ferner ist α der grösste Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es existiert eine Teilfolge $(a_n)_{n\in\Lambda}$ mit Grenzwert $\alpha > 0$. Gemäss den Grenzwertsätzen konvergiert dann $(\frac{1}{a_n})_{n\in\Lambda}$ gegen $\frac{1}{\alpha}$. Folglich ist $\frac{1}{\alpha}$ ein Häufungspunkt der Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit insbesondere grösser oder gleich dem kleinsten Häufungspunkt β. Es folgt

$$\frac{1}{\alpha} \geq \beta = \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

Analog ist β der kleinste Häufungspunkt der Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und es existiert eine andere Teilfolge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\Gamma}$ mit Grenzwert $\beta > 0$. Damit konvergiert $(a_n)_{n\in\Gamma}$ gegen $\frac{1}{\beta}$. Folglich ist $\frac{1}{\beta}$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit insbesondere kleiner oder gleich dem größten Häufungspunkt α, das heisst,

$$\frac{1}{\beta} \leq \alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Da α und β beide positiv sind, folgt zunächst $\frac{1}{\alpha} \leq \beta$ und damit insgesamt $\frac{1}{\alpha} = \beta$ wie in der ersten Formel behauptet.

Um die zweite Formel zu beweisen, betrachten wir $b_n = \frac{1}{a_n}$. Aus den Annahmen

$$0 < \alpha' = \liminf_{n\to\infty} a_n < \infty, \qquad 0 < \alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$$

folgt Existenz von n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$0 < \tfrac{1}{2}\alpha' < a_n < 2\alpha < \infty.$$

Daraus folgt

$$0 < \frac{1}{2\alpha} < b_n < \frac{2}{\alpha'} < \infty.$$

für alle $n \geq n_0$, das heisst, die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt ebenfalls die Annahmen. Damit dürfen wir die erste Formel auf b_n anwenden und erhalten

$$\frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}} = \limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

6.2. Konvergenzradien Sei $a_n = \frac{1+(-1)^n}{1+\alpha^n}$. Dann gilt

$$\rho_a = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha^n}}{\sqrt[n]{1+(-1)^n}}.$$

Die Folge der Zähler $\sqrt[n]{1+\alpha^n}$ ist konvergent. In der Tat gilt im Fall $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 \leq \sqrt[n]{1+\alpha^n} \leq \sqrt[n]{2} \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\alpha^n} = 1$$

und im Fall $1 < \alpha$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \alpha \leq \sqrt[n]{1+\alpha^n} \leq \sqrt[n]{2\alpha^n} = \alpha\sqrt[n]{2} \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\alpha^n} = \alpha.$$

Die Folge der Nenner $\sqrt[n]{1+(-1)^n}$ hat zwei die Häufungspunkte 0 und 1. Der Limes inferior wird durch den Häufungspunkt 1 im Nenner realisiert. Es folgt

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \alpha, & \text{falls } 1 \leq \alpha. \end{cases}$$

Sei $b_n = \frac{(-3)^n}{n+2}$. Dann ist $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{n+2}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n+2}}$ für $n \to \infty$ konvergent gegen 3. Somit ist $\rho_b = \frac{1}{3}$ der Konvergenzradius der Reihe $b(z)$. Daraus folgt sofort, dass $b(x)$ konvergiert, falls $|x| < \frac{1}{3}$ und divergiert, falls $|x| > \frac{1}{3}$. Das Verhalten der Reihe im Fall $|x| = \frac{1}{3}$ muss jedoch separat untersucht werden. Es gilt

$$b(\tfrac{1}{3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$$

Dies ist eine *alternierende harmonische Reihe* und damit konvergent. Dagegen ist

$$b(-\tfrac{1}{3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

eine *harmonische Reihe* und damit divergent. Insgesamt konvergiert $b(x)$ für alle

$$x \in \left]-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right]$$

Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists k \in \mathbb{N} : k! = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\exists k \in \mathbb{N} : k! = n$. Der Konvergenzradius dieser Reihe $c(z)$ ist somit

$$\rho_c = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

6.3. Vergleich mit der Zeta-Funktion Es gilt

$$q_n := \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+n^3-1}} \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5}} = 2n^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}} = 2n^{-\frac{7}{6}}.$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt

$$0 \leq \sum_{n=1}^{m} q_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2n^{-\frac{7}{6}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{6}} = 2\,\zeta(\tfrac{7}{6}) < \infty.$$

Die Folge der Partialsummen ist somit beschränkt durch $2\,\zeta(\frac{7}{6})$. Da alle Summanden q_n positiv sind, ist die Folge zudem monoton und damit konvergent.

6.4. Partialbrüche Wir zerlegen den Nenner in Linearfaktoren: Aus

$$(x^2 - x - 2) = (x - x_1)(x - x_2)$$

folgt $x_1 x_2 = -2$ und $-x_1 - x_2 = -1$. Wir schliessen auf $x_1 = 2$ und $x_1 = -1$.

(a) $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$ ist definiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

(b) Wir suchen $A, B \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x-2)(x+1)} \stackrel{!}{=} f(x).$$

Dazu muss gelten $(A+B)x + A - 2B = 1$ für alle x, das heisst $(A+B) = 0$ und $A - 2B = 1$. Es folgt $A = \frac{1}{3}$ und $B = -\frac{1}{3}$, also

$$f(x) = \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{3(x+1)}.$$

(c) Wir realisieren die Partialbrüche jeweils als Grenzwert einer geometrischen Reihe.

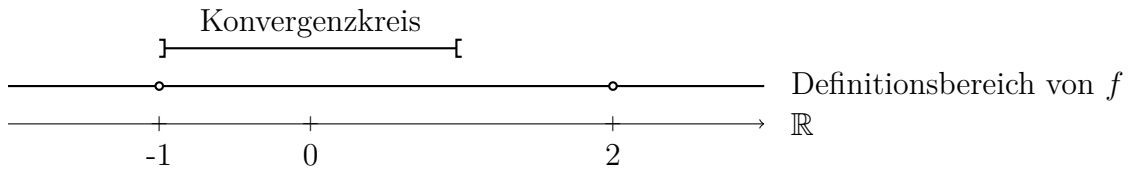
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k,$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k.$$

Insgesamt folgt

$$f(x) = -\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2^{-k}}{6} - \frac{(-1)^k}{3}\right)x^k$$

(d) Die Reihe konvergiert, falls beide geometrischen Reihen konvergieren. Die Bedingungen dazu sind $|\frac{x}{2}| < 1$ und $|-x| < 1$. Die Reihe konvergiert also für alle $x \in]-1, 1[$. Dies ist das grösste Intervall der Form $]-r, r[$, das Teilmenge des Definitionsbereichs der Funktionsvorschrift für f ist.



6.5. Scherzaufgabe Sei G die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, deren Dezimalform nicht die Ziffer 9 enthält. Für jede Ziffer einer Zahl in G gibt es nur 9 statt 10 Möglichkeiten, das heisst, die Menge $Z_k := \{n \in G\,;\ n < 10^k\}$ aller Zahlen in G mit höchstens k Ziffern hat $9^k - 1$ viele Elemente. (0 gehört nicht dazu, daher wird 1 abgezogen.) Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n\in G} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{n\in Z_k\setminus Z_{k-1}} \frac{1}{n}\Bigg) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{n\in Z_k\setminus Z_{k-1}} \frac{1}{10^{k-1}}\Bigg)\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{10^{k-1}} = 10\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{9}{10}\Big)^k < \infty.\end{aligned}$$