8.1. Lipschitz-Stetigkeit

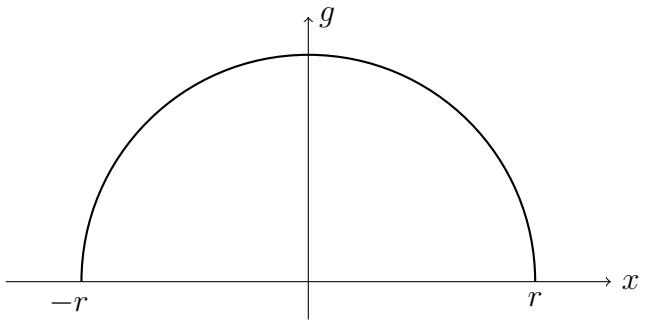
(a) Sei $r > 0$. Wir zeigen, dass $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 2r$ ist. Seien dazu $x, y \in [-r, r]$ beliebig. Dann gilt wie behauptet

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2r \cdot |x - y|.$$

(b) Angenommen, $L > 0$ wäre eine Lipschitzkonstante für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Wir betrachten $x = L$ und $y = 2L$ und stellen einen Widerspruch fest:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| = 3L \cdot |x - y| > L \cdot |x - y|.$$

(c) Die Funktion $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist nicht Lipschitz stetig.



Angenommen, $L > 0$ wäre eine Lipschitzkonstante für $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$. Zu festem $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir $x_m = r - \frac{1}{m}$ und $y = r$. Dann folgt $|x_m - y| = \frac{1}{m}$ und

$$\left|g(x_m) - g(y)\right| = \sqrt{r^2 - (r - \tfrac{1}{m})^2} - 0 = \sqrt{\frac{2r}{m} - \frac{1}{m^2}} = \sqrt{2rm - 1} \cdot |x_m - y|.$$

Fixieren wir ein $m > \frac{1}{2r}(L^2 + 1)$, so folgt mit $|g(x_m) - g(y)| > L \cdot |x_n - y|$ ein Widerspruch zur Lipschitz-Stetigkeit.

8.2. Abstand Die Funktion $d(z) = \inf\{|z - w|\,;\ w \in M\}$ misst den (euklidischen) Abstand des Punktes $z \in \mathbb{C}$ von der Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$.

(a) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ beliebig. Nach Dreiecksungleichung gilt

$$\forall w \in M : |z_1 - w| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - w|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\inf\{|z_1 - w|\,;\ w \in M\} &\leq \inf\{|z_1 - z_2| + |z_2 - w|\,;\ w \in M\} \\ &= |z_1 - z_2| + \inf\{|z_2 - w|\,;\ w \in M\}.\end{aligned}$$

Es gilt also $d(z_1) - d(z_2) \leq |z_1 - z_2|$. Vertauschen wir die Indizes, so folgt genauso $d(z_2) - d(z_1) \leq |z_2 - z_1|$. Da $d(z_1), d(z_2) \in \mathbb{R}$, folgt insgesamt

$$\Big|d(z_1) - d(z_2)\Big| \leq |z_1 - z_2|,$$

das heisst, $d\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$.

(b) Angenommen, es gilt die Äquivalenz $d(z) = 0 \Leftrightarrow z \in M$. Die Inklusion $M \subset \overline{M}$ ist trivial (Bemerkung 4.1.1), somit verbleibt $\overline{M} \subset M$ zu zeigen. Sei daher $z_0 \in \overline{M}$ beliebig. Zu zeigen ist $z_0 \in M$. Nach Definition existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit Grenzwert z_0. Da die Funktion d wie in (a) gezeigt stetig ist, folgt aus der Annahme wie behauptet

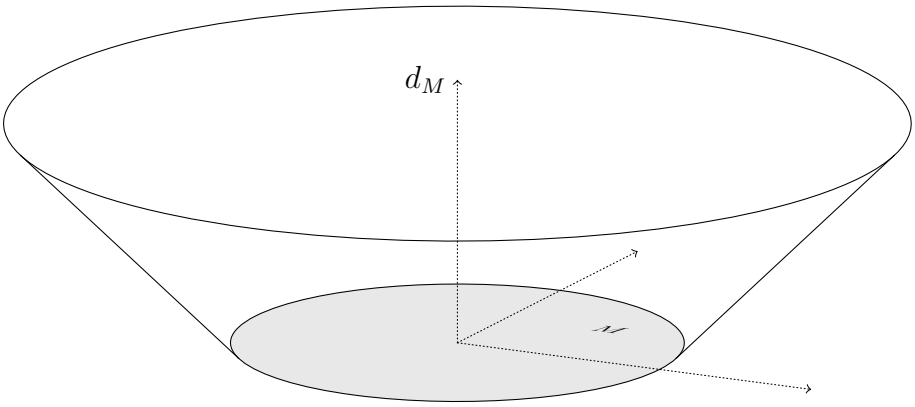
$$z_n \in M \;\Rightarrow\; d(z_n) = 0 \;\Rightarrow\; d(z_0) = 0 \;\Rightarrow\; z_0 \in M.$$

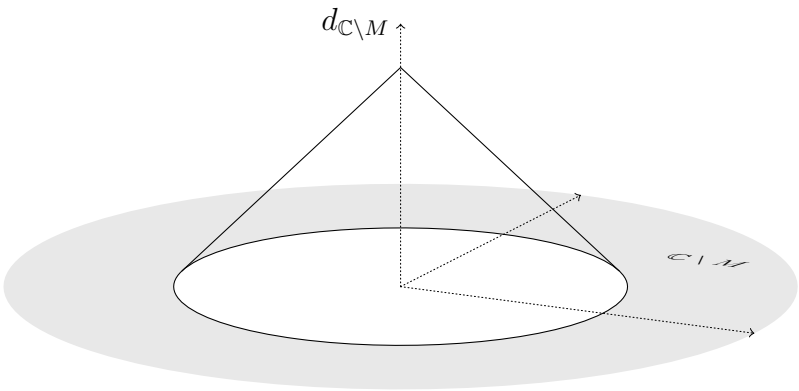
Angenommen, es gilt $M = \overline{M}$. Die Implikation $z \in M \Rightarrow d(z) = 0$ ist immer richtig vermöge $0 \leq d(z) = \inf\{|z - w|\,;\; w \in M\} \leq |z - z| = 0$. Es verbleibt die umgekehrte Implikation zu zeigen. Sei daher $z \in \mathbb{C}$ beliebig mit $d(z) = 0$. Nach Definition des Infimums existiert eine Folge $w_n \in M$ mit

$$|z - w_n| \to \inf\{|z - w|\,;\; w \in M\} = d(z) = 0, \quad (n \to \infty).$$

Es folgt $w_n \to z$. Da $w_n \in M$, ist $z \in \overline{M}$ nach Definition. Da $\overline{M} = M$ folgt $z \in M$.

(c) Die Graphen von d_M und $d_{\mathbb{C}\setminus M}$ für $M = \{z \in \mathbb{C}\,;\; |z| < 1\}$ sehen wie folgt aus.





8.3. Unstetigkeit

(a) Sei $x_0 = \frac{p}{q} \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}$. Gemäss Beispiel 4.1.2.v) gilt $x_0 \in \overline{]0,1] \setminus \mathbb{Q}}$. Es existiert also eine Folge irrationaler Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,1] \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Damit gilt $f(x_n) = 0 \nrightarrow \frac{1}{q} = f(x_0)$. Somit ist f unstetig in x_0.

(b) Sei $x_0 \in]0,1] \setminus \mathbb{Q}$ eine beliebige irrationale Zahl. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit Grenzwert x_0. Zu zeigen ist $f(x_n) \to f(x_0) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir betrachten

$$M_\varepsilon = \{\tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}\,;\ p, q \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le q \le \tfrac{1}{\varepsilon}\}.$$

Da M_ε eine *endliche* Menge rationaler Zahlen ist, gilt $d_\varepsilon = \min\{|x_0 - y|\,;\ y \in M_\varepsilon\} > 0$. Aus Konvergenz $x_n \to x_0$ folgt Existenz von $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \ge n(\varepsilon)$ gilt $|x_n - x_0| < d_\varepsilon$. Somit sind diese x_n nicht in M_ε und es gilt

$$\forall n \ge n(\varepsilon): \quad f(x_n) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{mit } q > \frac{1}{\varepsilon} \text{ falls } x_n \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x_n \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Es folgt $0 \le f(x_n) < \varepsilon$ für alle $n \ge n(\varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt wie behauptet $f(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$.